LÝ THUYẾT TRƯỜNG ĐIỆN TỪ
HP: EE2030

Giáo viên: **TS. Nguyễn Việt Sơn**

Bộ môn: **Kỹ thuật đo và Tin học công nghiệp**

Viện Điện - Đại học Bách Khoa Hà Nội

Email: son.nguyenviet@hust.edu.vn

- 2015 -

Tài liệu tham khảo:

1. **Cơ sở lý thuyết trường điện từ** - Nguyễn Bình Thành , 1970.

2. **Electromagnetics** -John D. Krauss - 4th edition, McGraw-Hill, 1991

3. **Electromagnetic fields and waves** - Magdy F. Iskander, Prentice Hall, 1992.

4. **Electromagnetics** - E.J. Rothwell, M.J. Cloud – CRC Press, 2001.

5. **Theory and problems of electromagnetics** – Schaum’s Outline, 1995(*)

6. **Fundamentals of Engineering electromagnetics** - R. Bansal, CRC Press 2006(*)

7. **Engineering Electromagnetics** - W.H. Hayt, J.A. Buck - McGraw-Hill, 2007(*)

(*) http://www.mica.edu.vn/perso/Nguyen-Viet-Son/courses.html

Nội dung chương trình:

1. Giải tích vector
2. Khái niệm cơ bản về trường điện từ
3. Luật Coulomb và cường độ điện trường
4. Dịch chuyển điện, luật Gauss, Dive
5. Năng lượng và điện thế
6. Vật dẫn - Điện môi - Điện dung
7. Các phương trình Poisson và Laplace.
8. Từ trường dừng
9. Lực từ và điện cảm
10. Trường biến thiên & hệ phương trình Maxwell
11. Sóng phẳng
12. Phản xạ và tán xạ sóng phẳng
13. Dẫn sóng và bức xạ

Chương 1: Giải tích vector

I. Vô hướng và vector.

II. Hệ tọa độ Descartes.

III. Tích vô hướng - Tích có hướng.

IV. Hệ tọa độ trụ.

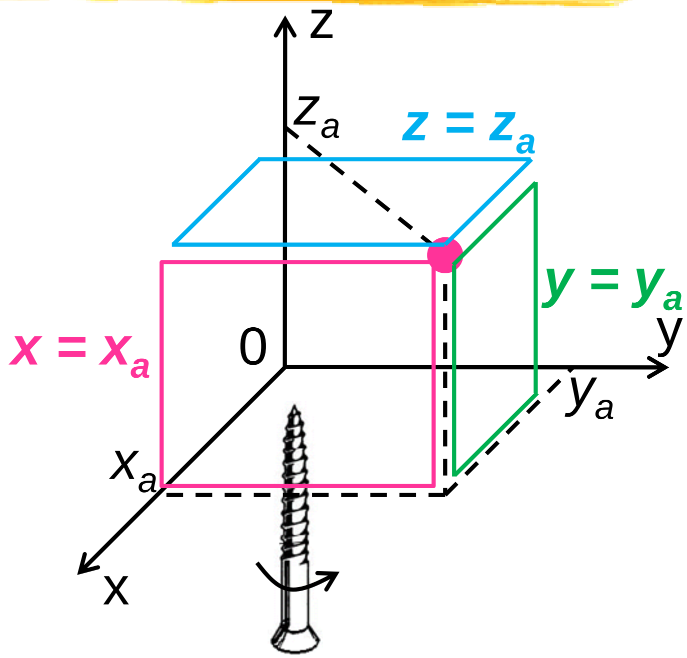
V. Hệ tọa độ cầu.

VI. Một số công thức giải tích vector

I. Vô hướng và Vector.

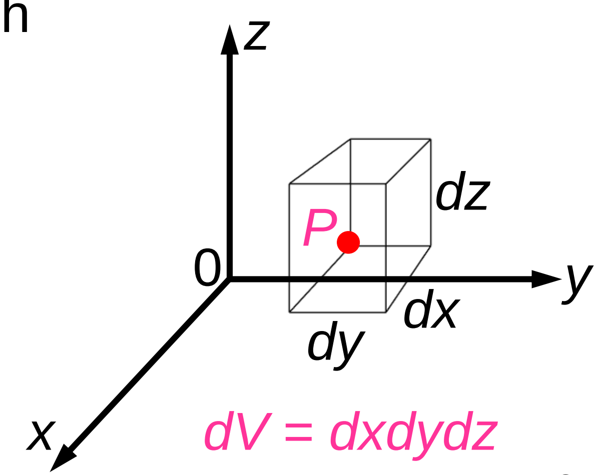
- ***Đại lượng vô hướng:*** Là đại lượng được biểu diễn bằng 1 số thực (dương, âm).
  - Ví dụ: Khoảng cách, thời gian, nhiệt độ, khối lượng, áp suất, thể tích …
  - Ký hiệu: *t, m, E, P, …*
- ***Đại lượng vector***: Là đại lượng được biểu diễn bằng ***độ lớn*** (số thực dương, âm) và ***hướng*** trong không gian (2 chiều, 3 chiều, … nhiều chiều).
  - Ví dụ: Lực, vận tốc, gia tốc, điện trường, từ trường …
  - Ký hiệu: **A, B, E, H,** … (có thể thay bằng $\overline{A}, \overline{B}, \overline{E}, \overline{H}, ..., \vec{A}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{H}, ...$)
- Các hệ tọa độ biểu diễn:
  - Hệ tọa độ Descartes.
  - Hệ tọa độ trụ.
  - Hệ tọa độ cầu.

II. Hệ tọa độ Descartes.



- Được tạo bởi 3 trục vuông góc từng đôi một.
- Các trục được chọn theo quy tắc vặn đinh ốc.
- Một điểm A trong không gian Descartes :
  - ❖ Giao điểm của 3 mặt phẳng.
  - ❖ Xác định được tọa độ x_a, y_a, z_a.
- *P* là điểm gốc của vi khối có các vi phân kích thước *dx*, *dy*, *dz*.

  → Thể tích của vi khối: $dV = dxdydz$

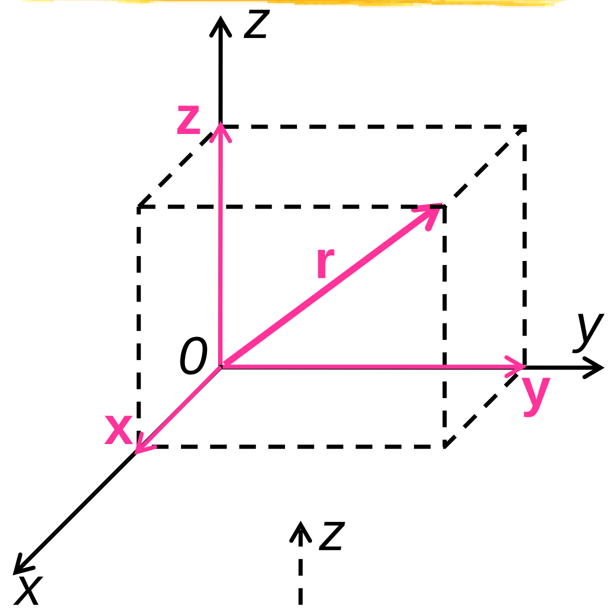


II. Hệ tọa độ Descartes.

- Xét vector **r** trong hệ tọa độ Descartes:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

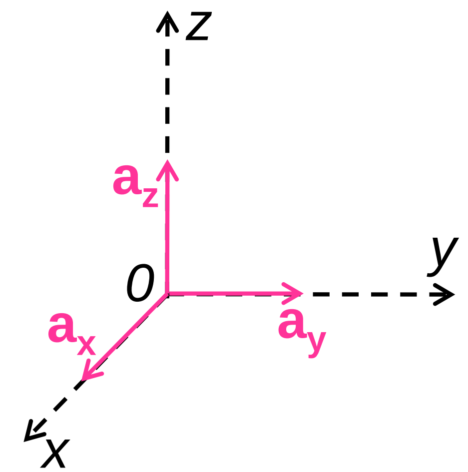
x, y, z là các vector thành phần của **r**



- Vector thành phần **x, y, z**
  - Độ lớn phụ thuộc vào vector **r**.
  - Hướng không thay đổi.
- Phân tích theo các vector đơn vị.

$$\mathbf{x} = x\mathbf{a_x} \ ; \ \mathbf{y} = y\mathbf{a_y} \ ; \ \mathbf{z} = z\mathbf{a_z}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a_x} + y\mathbf{a_y} + z\mathbf{a_z} = r_x\mathbf{a_x} + r_y\mathbf{a_y} + r_z\mathbf{a_z}$$



- Độ lớn của vector:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

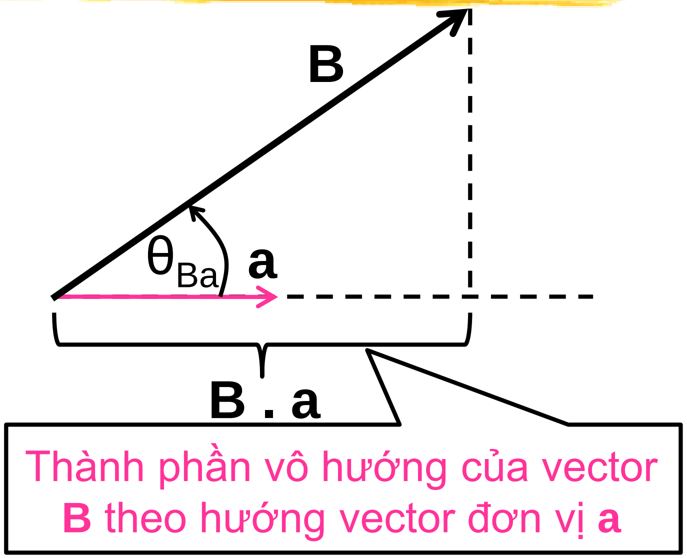
- Vector đơn vị theo hướng của **R**: $\mathbf{a}_R = \dfrac{\mathbf{R}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = \dfrac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$

III. Tích vô hướng – Tích có hướng.

1. Tích vô hướng

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta_{AB}$$

- **|A|, |B|** độ lớn của vector **A, B**
- θ_{AB} là góc nhỏ hơn giữa *2* vector **A** và **B**



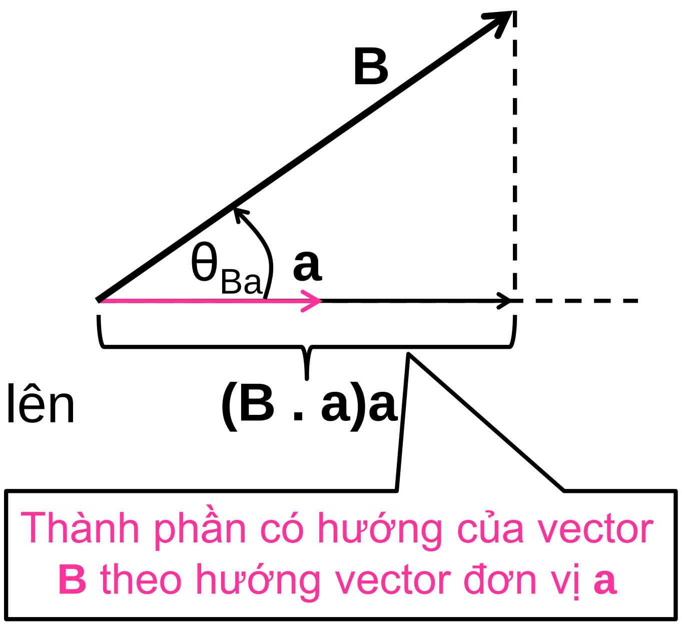
➢ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$; $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

➢ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2$; $\mathbf{a}_A\cdot\mathbf{a}_A = 1$

➢ Xét vector **B** và vector đơn vị **a**:

❖ $\mathbf{B}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{B}|\,|\mathbf{a}|\cos\theta_{Ba} = |\mathbf{B}|\cos\theta_{Ba}$

❖ **(B.a)a** → vector hình chiếu của vector **B** lên phương (hướng) của vector đơn vị **a**



III. Tích vô hướng – Tích có hướng.

1. Tích vô hướng

Ví dụ1.1: Xét trường vector $\mathbf{G} = y\mathbf{a}_x - 2.5x\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$, điểm $Q(4, 5, 2)$, vector

$$\mathbf{a}_N = \frac{1}{3}\left(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z\right).$$

a. Tính giá trị của trường vector **G** tại điểm *Q*

b. Tính thành phần vô hướng của **G** tại *Q* theo hướng của vector $\mathbf{a}_N$

c. Tính thành phần có hướng của **G** tại *Q* theo hướng của vector $\mathbf{a}_N$

Giải:

a. Giá trị trường vector tại *Q*: $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q) = 5\mathbf{a}_x - 2{,}5.4.\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z = 5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$

b. Thành phần vô hướng:

$$\mathbf{G}\bullet\mathbf{a}_N = (5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z)\bullet\frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = \frac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

c. Thành phần có hướng:

$$(\mathbf{G}\bullet\mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N = (-2)\frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = -1.333\mathbf{a}_x - 0.667\mathbf{a}_y + 1.333\mathbf{a}_z$$

III. Tích vô hướng – Tích có hướng.

2. Tích có hướng

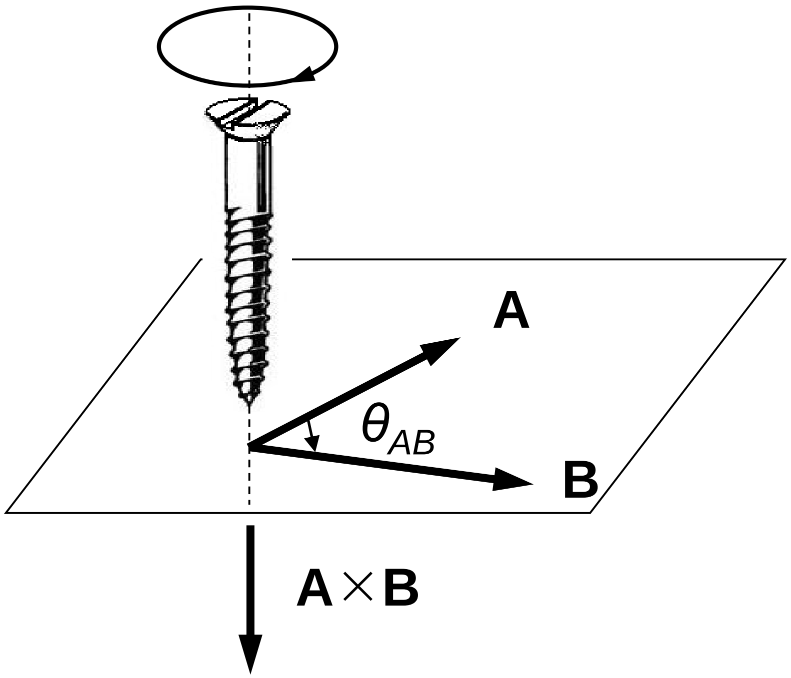
- Định nghĩa:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N\, |\mathbf{A}|\, |\mathbf{B}| \sin\theta_{AB}$$

trong đó $\mathbf{a}_N$ vector pháp tuyến

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



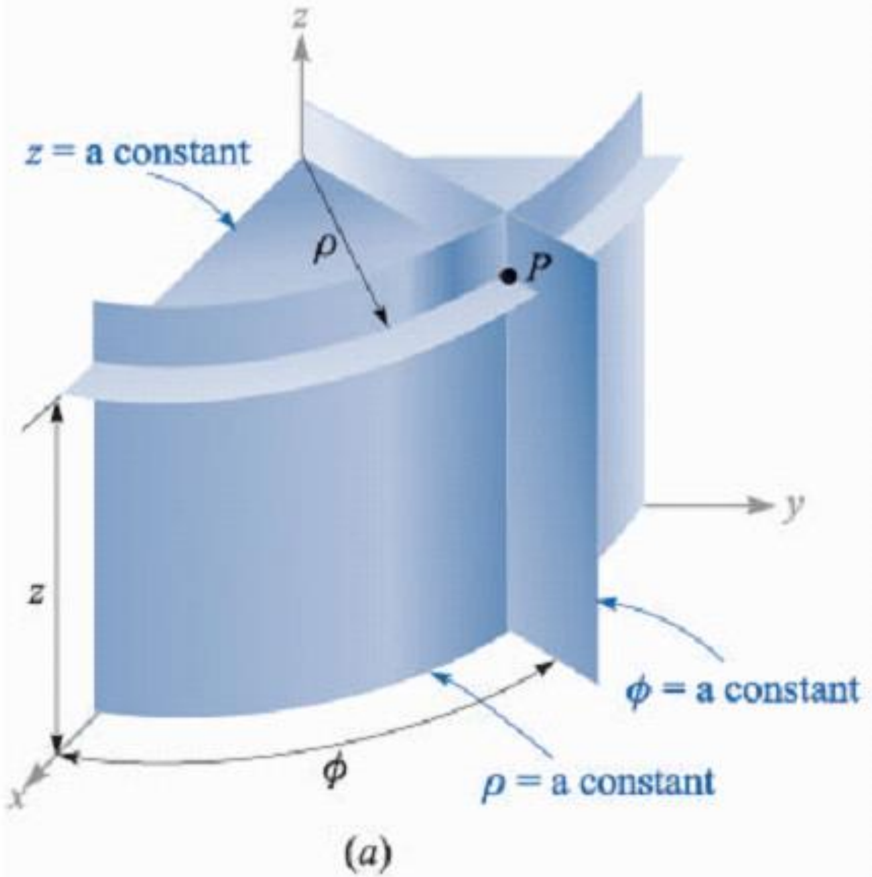
$\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$: véctơ đơn vị của các trục x, y, z

Ví dụ: $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$; $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z$$

IV. Hệ tọa độ trụ tròn

- Điểm *P* trong hệ tọa độ trụ tròn:
  - ρ khoảng cách từ *P* đến trục trụ.
  - φ góc dương hợp bởi trục tọa độ góc với đường thẳng nối gốc tọa độ với hình chiếu của *P* lên mặt tọa độ cực.
  - z độ cao của điểm *P* so với mặt phẳng của hệ tọa độ góc.



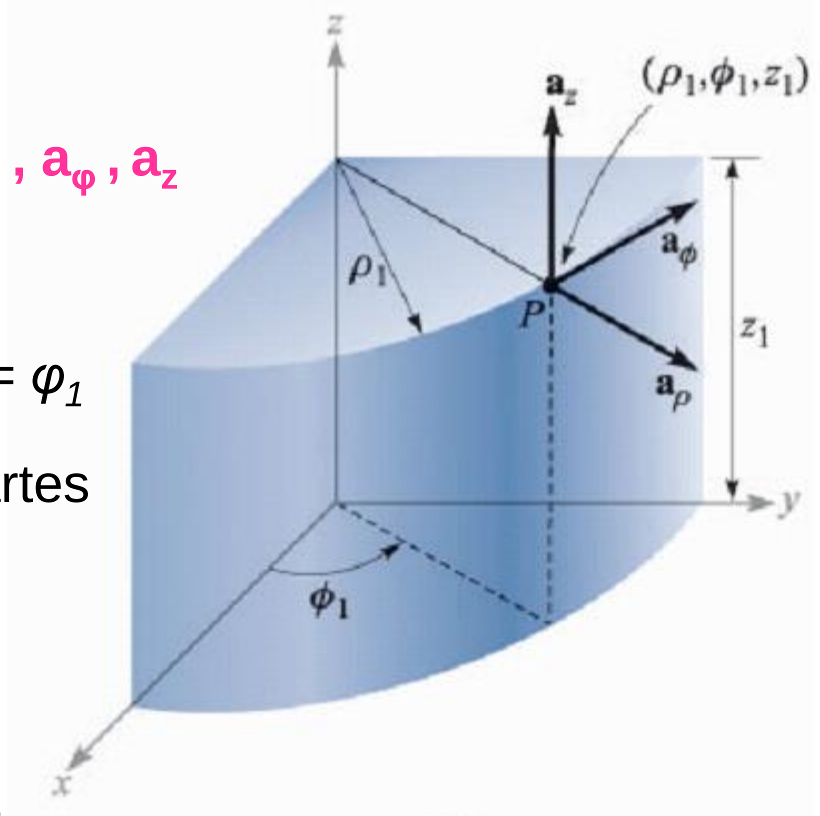
$P(\rho, \varphi, z)$

- Có thể coi *P* là giao của *3* mặt:
  - Mặt phẳng $z = const$
  - Mặt cong $\rho = const$.
  - Mặt phẳng đường sinh $\varphi = const$.

- ~~Không xét các hệ tọa độ trụ ellipse, hệ tọa độ trụ hyperbol, …~~

IV. Hệ tọa độ trụ tròn .

- Vector đơn vị trong hệ tọa độ trụ tròn: $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\varphi$, $\mathbf{a}_z$
  - $\mathbf{a}_\rho$: vector pháp tuyến mặt trụ $\rho = \rho_1$
  - $\mathbf{a}_\varphi$: vector pháp tuyến mặt phẳng $\varphi = \varphi_1$
  - $\mathbf{a}_z$: tương tự trong trục tọa độ Descartes



(b)

- Tính chất:
  - $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\varphi$ thay đổi theo φ → trong các phép đạo hàm, tích phân theo biến φ, các vector $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\varphi$ là hàm của φ.
  - $\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z$

Công thức chuyển đổi:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

IV. Hệ tọa độ trụ tròn .

- Xét vi khối có kích thướng vô cùng nhỏ có kích thước *dρ, ρdφ*, và *dz*

$$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

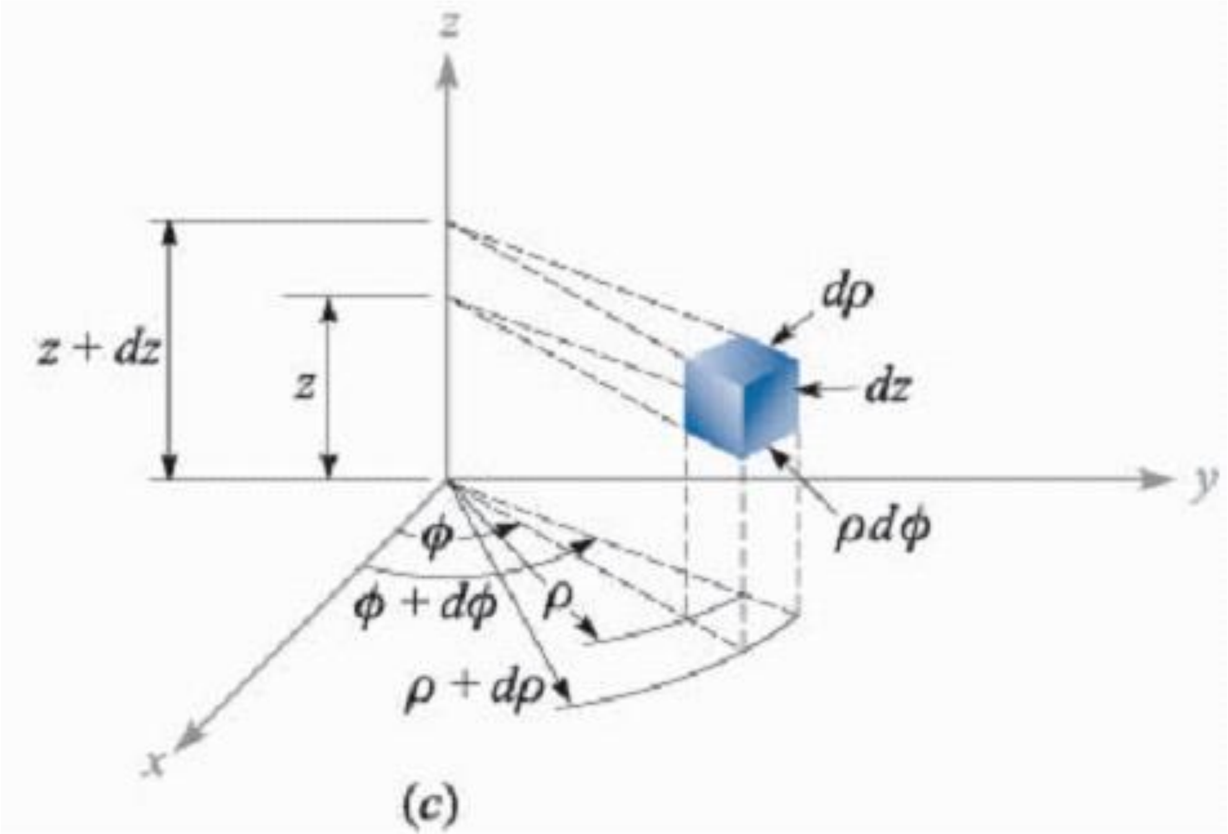
- Diện tích mặt trụ:

$$2\pi r.(h + r)$$

- Thể tích khối trụ:

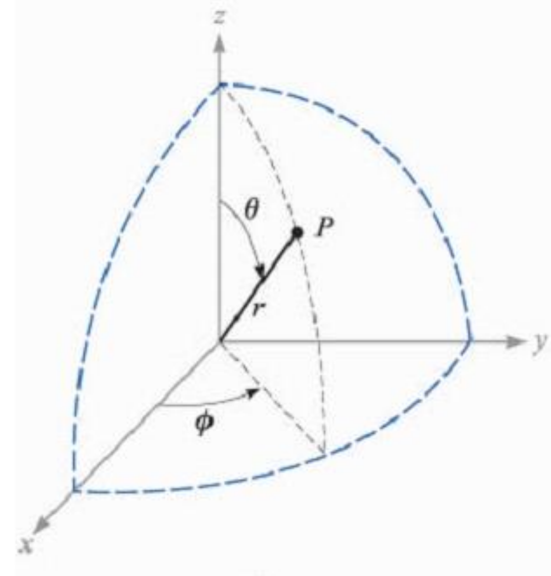
$$\pi . r^2 . h$$

(*h* chiều cao của trụ)

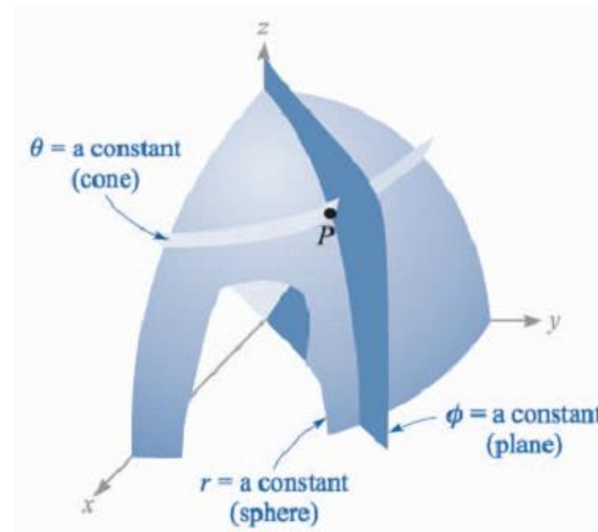


V. Hệ tọa độ cầu

- Hệ tọa độ cầu được xây dựng dựa trên hệ tọa độ Descartes: Điểm *P* xác định bởi
  - *r* khoảng cách từ *P* đến gốc tọa độ (tâm cầu).
  - *θ* góc hợp bởi chiều dương của trục *z* với đường thẳng nối gốc tọa độ với điểm P.
  - *φ* góc dương hợp bởi trục *x* với đường thẳng nối gốc tọa độ với hình chiếu của *P* lên mặt tọa độ cực.
- Điểm *P* là giao của *3* mặt.



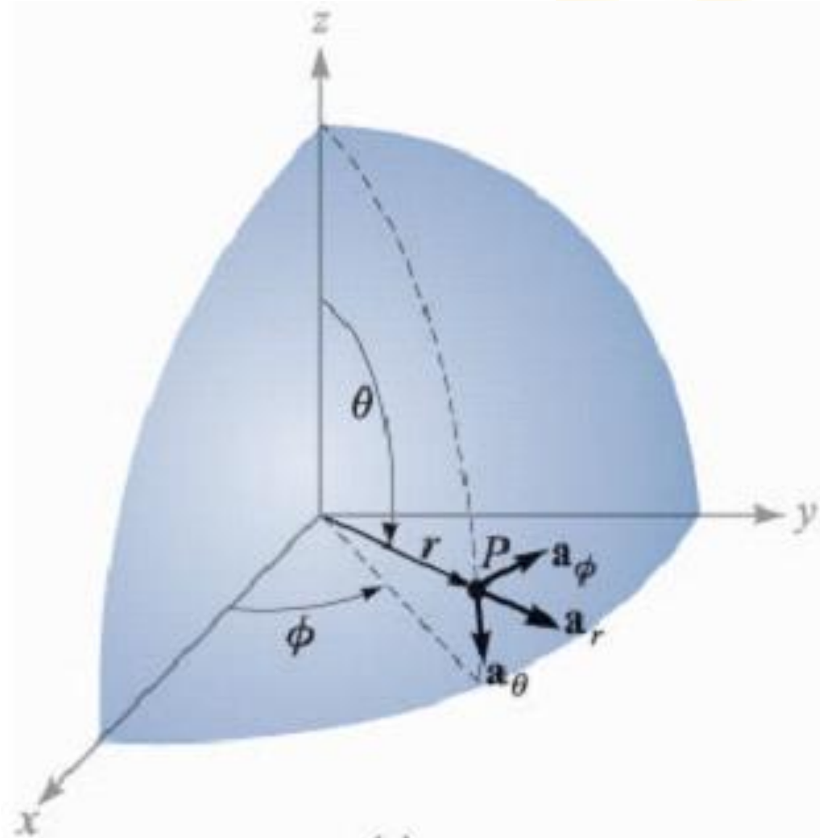
(a)



(b)

V. Hệ tọa độ cầu

- Vector đơn vị trong hệ tọa độ cầu:
  - $\mathbf{a}_r$: vector pháp tuyến của mặt cầu tại điểm *P*, có chiều hướng ra ngoài, nằm trên đáy của hình nón $\theta = const$, và mặt phẳng $\varphi = const$
  - $\mathbf{a}_\theta$: vector pháp tuyến của đáy mặt nón, nằm trong mặt phẳng, và tiếp tuyến với mặt cầu tại *P*.
  - $\mathbf{a}_\varphi$: giống trong hệ tọa độ trụ tròn.



(c)

Công thức chuyển đổi:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

V. Hệ tọa độ cầu

- Xét vi khối có kích thước vô cùng nhỏ:

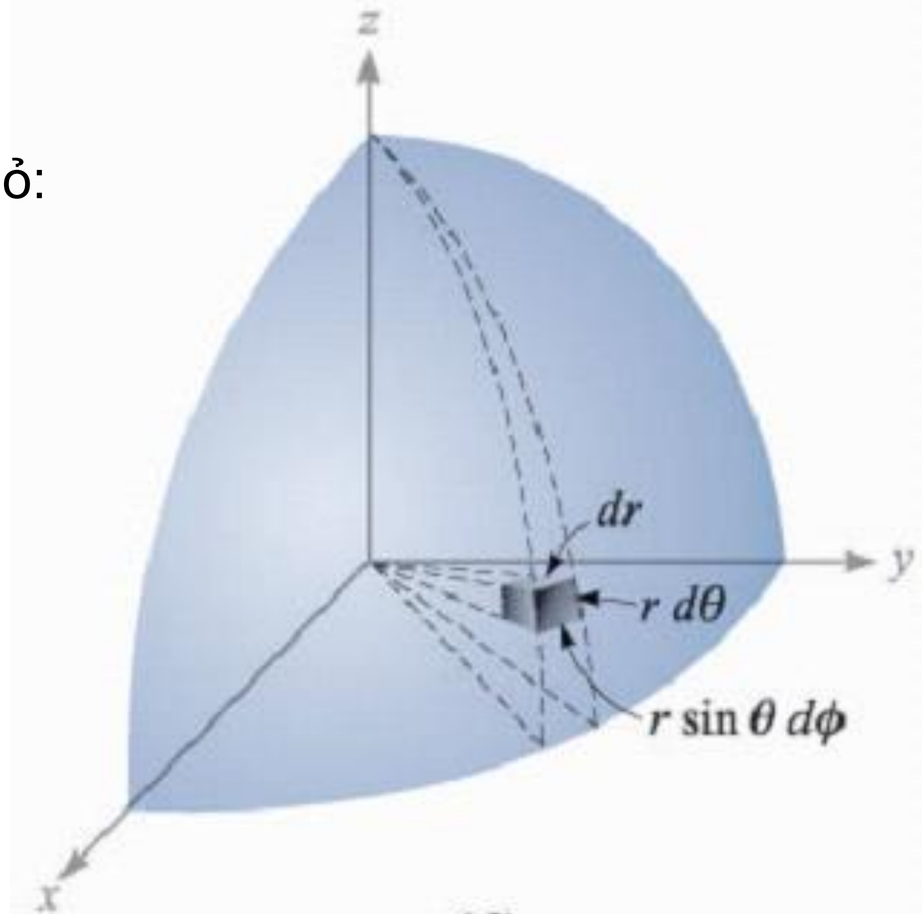
$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

- Diện tích mặt cầu:

$$S_{cầu} = 4\pi.r^2$$

- Thể tích khối cầu:

$$V_{cầu} = 4/3.\ \pi.\ r^3$$



(d)

VI. Một số công thức giải tích vector

Độ biến thiên vector (Grad - gradient)

$$Grad\ A = \frac{\delta A}{\delta x}\mathbf{a}_\mathbf{x} + \frac{\delta A}{\delta y}\mathbf{a}_\mathbf{y} + \frac{\delta A}{\delta z}\mathbf{a}_\mathbf{z}$$

Độ tản của vector (div - divergence)

$$div\mathbf{A} = \nabla.\mathbf{A} = \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z}$$

$$divgrad\mathbf{A} = \Delta\mathbf{A} = \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta z^2}$$

Độ xoáy của vector (Rot - rotationnel)

$$Rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\mathbf{x} & \mathbf{a}_\mathbf{y} & \mathbf{a}_\mathbf{z} \\ \dfrac{\delta\mathbf{A}}{\delta x} & \dfrac{\delta\mathbf{A}}{\delta y} & \dfrac{\delta\mathbf{A}}{\delta z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$

Chương 2: Khái niệm cơ bản về trường điện từ

I. Khái niệm cơ bản

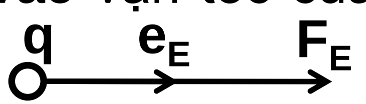
- ***Định nghĩa:*** Trường điện từ là một ***dạng vật chất cơ bản***, chuyển động với vận tốc *c* trong mọi hệ quy chiếu quán tính trong chân không, nó thể hiện sự ***tồn tại*** và ***vận động*** qua những ***tương tác với một dạng vật chất khác*** là những hạt hoặc những môi trường mang điện.

- ***Tính tồn tại***: Trường điện từ có khả năng ***tác dụng động lực học*** lên các vật thể, trường điện từ có ***năng lượng***, ***động lượng*** phân bố, ***chuyển động trong không gian***, với vận tốc hữu hạn.

- ***Tính vận động***: Thể hiện ở ***khả năng tác dụng lên các vật thể, môi trường*** (vd: lực lorenx) và ***sự lan truyền tác dụng đó***.

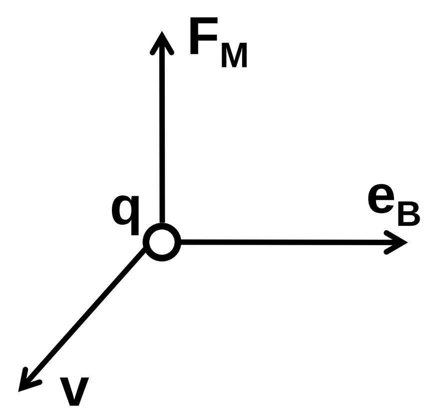
I. Khái niệm cơ bản

- Trong hệ quy chiếu có quán tính, trường điện từ có hai mặt tương tác (*lực Lorentz*) với hạt (vật) mang điện tùy theo cách chuyển động của vật trong hệ.
  - ***Lực điện F_E***: Thay đổi theo vị trí, không phụ thuộc vào vận tốc của vật (*mặt điện trường*).



  - ***Lực từ F_M:*** tác động khi vật chuyển động (*mặt từ trường*).

$$F = F_E + F_M$$



- Điện trường, từ trường, lực Lorentz & năng lượng của chúng là khái niệm tương đối (xét theo sự chuyển động của vật mang điện trong một hệ quy chiếu).

Chương 2: Khái niệm cơ bản về trường điện từ

I. Khái niệm cơ bản

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

III. Cường độ điện trường của điện tích điểm

IV. Cường độ điện trường của điện tích khối liên tục

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

VI. Cường độ điện trường của điện tích mặt

VII. Đường sức - Ống sức

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

➢ Để xây dựng mô hình hệ Trường - Môi trường mang điện, cần xác định những thông số biểu diễn & mô tả hệ:

- ***Biến trạng thái***: Đo & biểu diễn *trạng thái* và *quá trình động lực học* của hệ hoặc năng lực tương tác của các thành viên trong hệ.

- ***Biến hành vi:*** Biểu diễn tính *quy luật các hoạt động*, hành vi của một thực thể trong quá trình tương tác với thực thể khác.

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

1. Biến trạng thái cơ bản của vật mang điện

- Biến trạng thái cơ bản của vật mang điện là *điện tích q*.
- Đo năng lực tương tác lực (chịu tác dụng lực) với trường điện từ.
- Có 02 loại hạt (vật) mang điện:
  - *Hạt mang điện tích âm*: $e = -1,6.10^{-19}$ (C)
  - *Hạt mang điện tích dương*
- Hạt (vật) không mang điện (điện tích bằng không) nếu không có khả năng tương tác lực với trường điện từ.

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

2. Biến trạng thái cơ bản của trường điện từ

a. Vector cường độ điện trường E:

- Xét vật nhỏ mang điện tích *dq*, đặt tĩnh trong hệ quy chiếu có quán tính, chịu một lực $d\mathbf{F}_{\mathbf{E}}$ → ở ***lân cận vật mang điện có điện trường***.

- Vector trạng thái ***cường độ điện trường*** là biến trạng thái đo & biểu diễn ***năng lực tác động về điện của lực Lorenx*** ở lân cận vật mang điện trong trường điện từ: $d\mathbf{F}_{\mathbf{E}} = dq\mathbf{E}$

- Thứ nguyên: $[E]=\dfrac{[F]}{[q]}=\dfrac{N}{C}=\dfrac{Nm}{Cm}=\dfrac{V}{m}$

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

2. Biến trạng thái cơ bản của trường điện từ

b. Vector cường độ từ cảm B:

- Xét vật nhỏ mang điện tích *dq*, chuyển động trong hệ quy chiếu có quán tính, chịu lực $d\mathbf{F}_M$ → ở ***lân cận vật mang điện có từ trường***.
- Lực $d\mathbf{F}_M$ hướng theo chiều $\mathbf{e}_F$, vuông góc với vận tốc **v** của hạt mang điện, vuông góc với vector đơn vị $\mathbf{e}_B$ xác định theo mỗi điểm trong hệ quy chiếu.

$$d\mathbf{F}_\mathbf{M} = dq(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = dqvB\mathbf{e}_\mathbf{v}\times\mathbf{e}_\mathbf{B}$$

Mặt khác: $dqv = dq\dfrac{dl}{dt} = idl$

Ta có: $d\mathbf{F}_\mathbf{M} = iBdl\mathbf{e}_\mathbf{v}\times\mathbf{e}_\mathbf{B}$ [T]

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

3. Tính tương đối của E & B

- Điện trường **E** & từ trường **B:**
  - Những thể hiện của trường điện từ trong hệ quy chiếu. Trường điện từ được "cảm nhận" thông qua **E** & **B.**
  - Xác định theo sự chuyển động của hạt mang điện (mang tính tương đối).

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathbf{E}} + \mathbf{F}_{\mathbf{M}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

- Lực Lorenz gồm 2 thành phần:
  - ❖ Không đổi: $\mathbf{F}_{\mathbf{E}} = q\mathbf{E}$
  - ❖ Phụ thuộc vào hệ quy chiếu: $\mathbf{F}_{\mathbf{M}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

4. Quan hệ giữa điện tích q & lực tĩnh điện - Luật Coulomb

➢ Luật Coulomb là luật về tương tác giữa các hạt mang điện: *Độ lớn lực tương tác giữa 2 hạt mang điện tỷ lệ thuận với điện tích q_1, q_2, và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng.*

$$\boxed{F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}}$$

ε_0: hằng số điện môi trong chân không

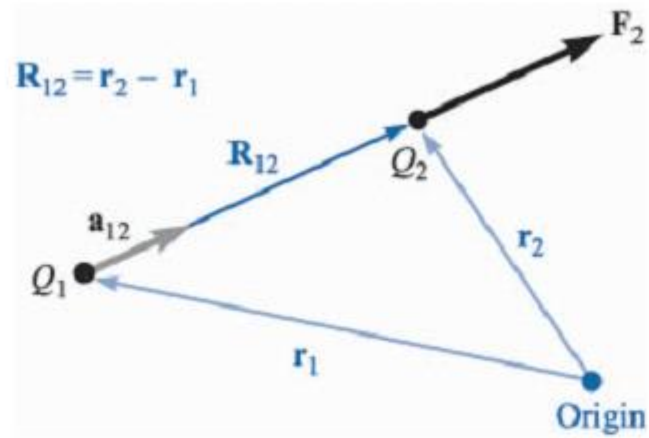
Q_1, Q_2: điện tích của hạt mang điện

trong đó: $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ với $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi 10^{-7} c^2} \approx 8{,}854.10^{-12} F/m$

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

4. Quan hệ giữa điện tích q & lực tĩnh điện - Luật Coulomb

- Xét 2 điện tích cùng dấu Q_1 và Q_2 trong chân không, xác định bởi vector $\mathbf{r}_1$ & $\mathbf{r}_2$.



- Lực $\mathbf{F}_2$ đặt trên điện tích Q_2 có:
  - **Phương**: Cùng phương với vector $\mathbf{R}_{12}$ nối giữa Q_1 & Q_2.

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

  - **Hướng**: Cùng hướng với vector $\mathbf{R}_{12}$.

$$\boxed{\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{12}}$$

$\mathbf{a}_{12}$ là vector đơn vị của vector $\mathbf{R}_{12}$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

4. Quan hệ giữa điện tích q & lực tĩnh điện - Luật Coulomb

Ví dụ 2.1: Cho điện tích $Q_1 = 3.10^{-4}$ (C) đặt tại $A(1, 2, 3)$, điện tích $Q_2 = -10^{-4}$ (C) đặt tại $B(2, 0, 5)$ trong chân không. Tính lực tác dụng của Q_1 lên Q_2.

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{12}$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2-1)\mathbf{a}_x + (0-2)\mathbf{a}_y + (5-3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$\rightarrow \begin{cases} R_{12} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \\ \mathbf{a}_{12} = \dfrac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \dfrac{1}{3}\mathbf{a}_x - \dfrac{2}{3}\mathbf{a}_y + \dfrac{2}{3}\mathbf{a}_z \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{F}_2 = -10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z\,(N)}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{12} = \frac{3.10^{-4}(-10^{-4})}{4\pi.8,854.10^{-12}.3^2}\left(\frac{1}{3}\mathbf{a}_x - \frac{2}{3}\mathbf{a}_y + \frac{2}{3}\mathbf{a}_z\right) = \boxed{-30\left(\frac{1}{3}\mathbf{a}_x - \frac{2}{3}\mathbf{a}_y + \frac{2}{3}\mathbf{a}_z\right)}$$

Chương 2: Khái niệm cơ bản về trường điện từ

III. Cường độ điện trường của điện tích điểm

➢ Xét điện tích điểm Q_1 đặt cố định, điện tích thử Q_t đặt trong không gian xung quanh điện tích Q_1 → Q_t chịu sự tác dụng lực tĩnh điện Coulomb

$$\mathbf{F_t} = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\varepsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a_{1t}} \rightarrow \frac{\mathbf{F_t}}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a_{1t}}$$

➢ ***Cường độ điện trường của điện tích điểm tạo ra trong chân không:***

- ❖ Vector lực tác dụng lên một điện tích thử 1C
- ❖ Thứ nguyên: V/m
- ❖ Vector: $\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a_R}}$

- **R**: vector hướng từ *Q* đến điểm xét

- $\mathbf{a_R}$: vector đơn vị của **R**

III. Cường độ điện trường của điện tích điểm

➢ ***Hệ tọa độ cầu:***

❖ Xét điện tích điểm *Q* đặt tại tâm hệ tọa độ cầu

❖ Xét cường độ điện trường tại một điểm trên mặt cầu bán kính *r*:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

$\mathbf{a_r}$: vector đơn vị hệ tọa độ cầu

➢ ***Hệ tọa độ descartes:***

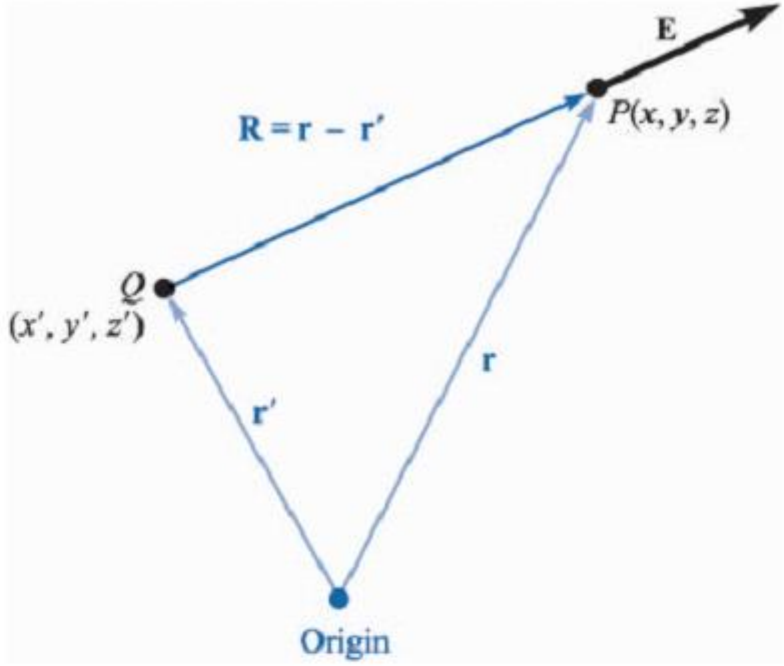
❖ Xét điện tích điểm *Q* đặt tại gốc tọa độ.

❖ Cường độ điện trường tại một điểm bất kỳ có tọa độ (*x*, *y*, *z*)

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{a_x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{a_y} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{a_z}\right)}$$

III. Cường độ điện trường của điện tích điểm

➢ ***Hệ tọa độ descartes:***



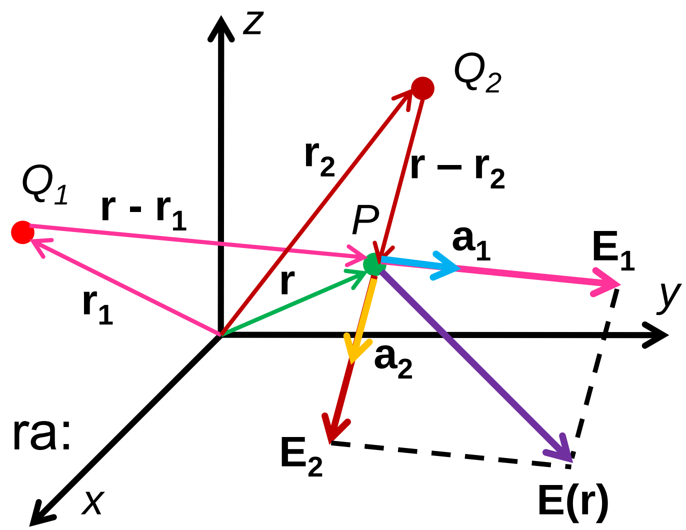
- ❖ Xét điện tích điểm *Q* đặt tại điểm bất kỳ có tọa độ (*x’, y’, z’*).
- ❖ Cường độ điện trường tại *P(x, y, z)*

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rightarrow \begin{cases} R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \\ \mathbf{a_R} = \dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{Q\left[(x - x')\mathbf{a_x} + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z\right]}{4\pi\varepsilon_0\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}}}$$

III. Cường độ điện trường của điện tích điểm

- Xét điện tích điểm Q_1 & Q_2 trong chân không.
- Xét điểm P bất kỳ trong chân không
- Theo tính chất tuyến tính của lực Coulomb → cường độ điện trường do 2 điện tích điểm tạo ra:



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2}\mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^2}\mathbf{a}_2$$

- Tổng quát:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_\mathbf{k}|^2}\mathbf{a}_\mathbf{k}}$$

III. Cường độ điện trường của điện tích điểm

Ví dụ 2.2: Cho Q_1 = 4.10^{-9}C tại điểm P_1(3, -2, 1), Q_2 = 3.10^{-9}C tại điểm P_2(1, 0, -2), Q_3 = 2.10^{-9}C tại điểm P_3(0, 2, 2), Q_4 = 10^{-9}C đặt tại điểm P_4(-1, 0, 2). Tính cường độ điện trường tại điểm P(1, 1, 1).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2}\mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^2}\mathbf{a}_2 + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_3|^2}\mathbf{a}_3 + \frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_4|^2}\mathbf{a}_4$$

Trong đó:

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1 = (x-x_1)\mathbf{a}_\mathrm{x} + (y-y_1)\mathbf{a}_\mathrm{y} + (z-z_1)\mathbf{a}_\mathrm{z} = -2\mathbf{a}_\mathrm{x} + 3\mathbf{a}_\mathrm{y} \rightarrow \begin{cases} |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| = \sqrt{(2)^2+3^2} = 3,32 \\ \mathbf{a}_1 = \dfrac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} = \dfrac{-2}{3,32}\mathbf{a}_\mathrm{x} + \dfrac{3}{3,32}\mathbf{a}_\mathrm{y} \end{cases}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| = 3,16 \qquad \mathbf{a}_2 = 0,32\mathbf{a}_\mathrm{y} + 0.95\mathbf{a}_\mathrm{z}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3| = 1,73 \qquad \mathbf{a}_3 = 0,58\mathbf{a}_\mathrm{x} - 0,58\mathbf{a}_\mathrm{y} - 0,58\mathbf{a}_\mathrm{z}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_4| = 2,45 \qquad \mathbf{a}_4 = 0,82\mathbf{a}_\mathrm{x} + 0,41\mathbf{a}_\mathrm{y} - 0,41\mathbf{a}_\mathrm{z}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = 24,66\mathbf{a}_\mathrm{x} + 9,99\mathbf{a}_\mathrm{y} - 32,4\mathbf{a}_\mathrm{z}}$$

Chương 2: Khái niệm cơ bản về trường điện từ

I. Khái niệm cơ bản

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

III. Cường độ điện trường của điện tích điểm

IV. Cường độ điện trường của điện tích khối liên tục

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

VI. Cường độ điện trường của điện tích mặt

VII. Đường sức - Ống sức

IV. Cường độ điện trường của điện tích khối liên tục

- Xét vùng không gian được lấp đầy bằng các hạt mang điện (không gian giữa lưới điều khiển & cực cathode của ống phóng điện tử trong tivi, màn hình CRT...)

- Coi sự phân bố của các hạt mang điện là liên tục, mô tả bằng hàm ***mật độ điện tích khối*** (C/m³).

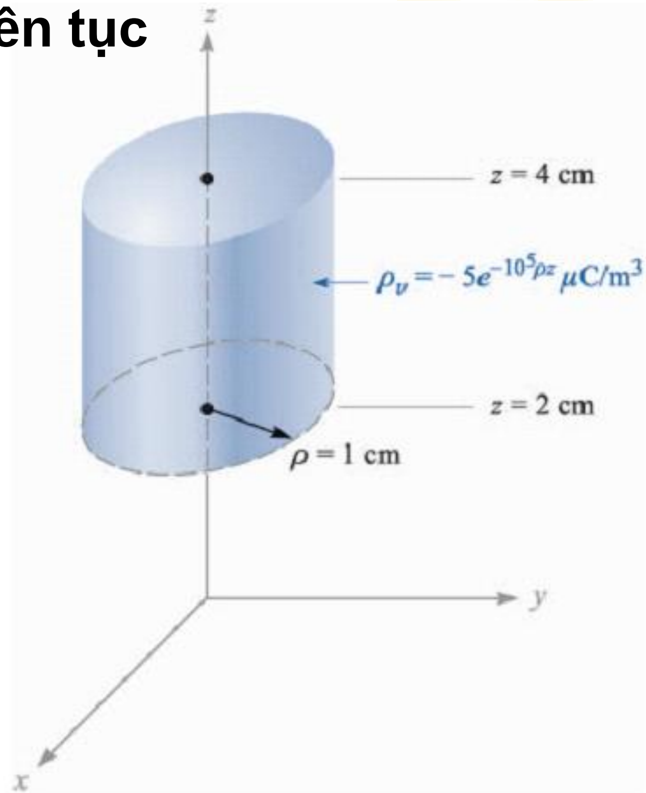
$$\boxed{\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}}$$

- Tổng số điện tích tồn tại trong một không gian hữu hạn thể tích *V* là:

$$\boxed{Q = \int_V \rho_v dv}$$

IV. Cường độ điện trường của điện tích khối liên tục

Ví dụ 2.3: Tính điện tích tổng của chùm điện tử dạng hình trụ, biết $\rho_v = -5e^{-10^5 \rho z} \mu C/m^3$



Giải: Áp dụng công thức:

$$Q = \int_V \rho_v dV = \int_V -5.10^{-6}.e^{-10^5 \rho z} dV$$

Thể tích của trụ tròn: $dV = \rho d\rho d\varphi dz$

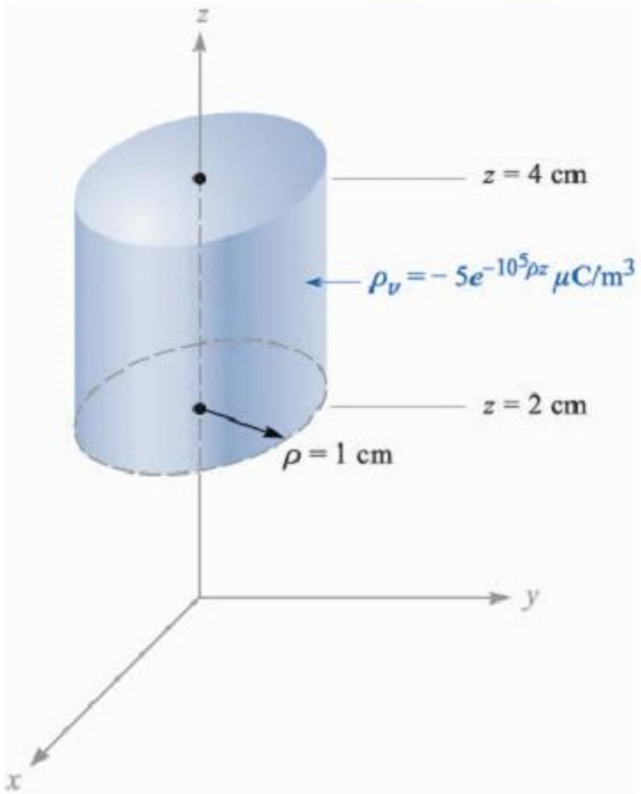
Vậy: $Q = \int_{0,02}^{0,04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0,01} -5.10^{-6}.e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho d\varphi dz$

$$Q = \int_{0,02}^{0,04} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{0,01} -5.10^{-6}.e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho dz = \int_{0,02}^{0,04} \int_0^{0,01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho dz$$

$$Q = \int_0^{0,01} \rho d\rho \int_{0,02}^{0,04} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} dz = \int_0^{0,01} 10^{-10} \frac{\pi}{\rho} e^{-10^5 \rho z} \Big|_{0,02}^{0,04} \rho d\rho = \int_0^{0,01} 10^{-10} \frac{\pi}{\rho} \left(e^{-4000\rho} - e^{-1000\rho} \right) \rho d\rho$$

IV. Cường độ điện trường của điện tích khối liê

Ví dụ 2.3: Tính điện tích tổng của chùm điện tử dạng hình trụ, biết $\rho_v = -5e^{-10^5 \rho z} \mu C / m^2$



Giải:

$$Q = 10^{-10} \pi \left(\frac{e^{-4000\rho}}{-4000} - \frac{e^{-2000\rho}}{-2000} \right) \Bigg|_0^{0,01}$$

Vậy điện tích tổng có giá trị là:

$$Q = -10^{-10} \pi \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{4000} \right) = \frac{-\pi}{40} = 0,0785 pC$$

IV. Cường độ điện trường của điện tích khối liên tục

➢ Cường độ điện trường tại **r** do một điện tích khối ΔQ gây ra được tính theo công thức:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \rightarrow \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\rho_v \Delta v}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

Trong đó:

r: vector định vị cường độ điện trường **E**

r': vector định vị nguồn điện tích khối $\rho(\mathbf{r}')dv'$

➢ Tích phân 3 lớp với biến *x'*, *y'*, *z'* trong hệ tọa độ Descartes

Chương 2: Khái niệm cơ bản về trường điện từ

I. Khái niệm cơ bản

II. Thông số cơ bản của trường điện từ & môi trường mang điện

III. Cường độ điện trường của điện tích điểm

IV. Cường độ điện trường của điện tích khối liên tục

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

VI. Cường độ điện trường của điện tích mặt

VII. Đường sức - Ống sức

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

- Xét tia điện tử trong ống phóng cathode (hoặc dây dẫn tích điện). Giả thiết:
  - Các điện tử chuyển động đều
  - Bỏ qua từ trường sinh ra bởi các điện tử

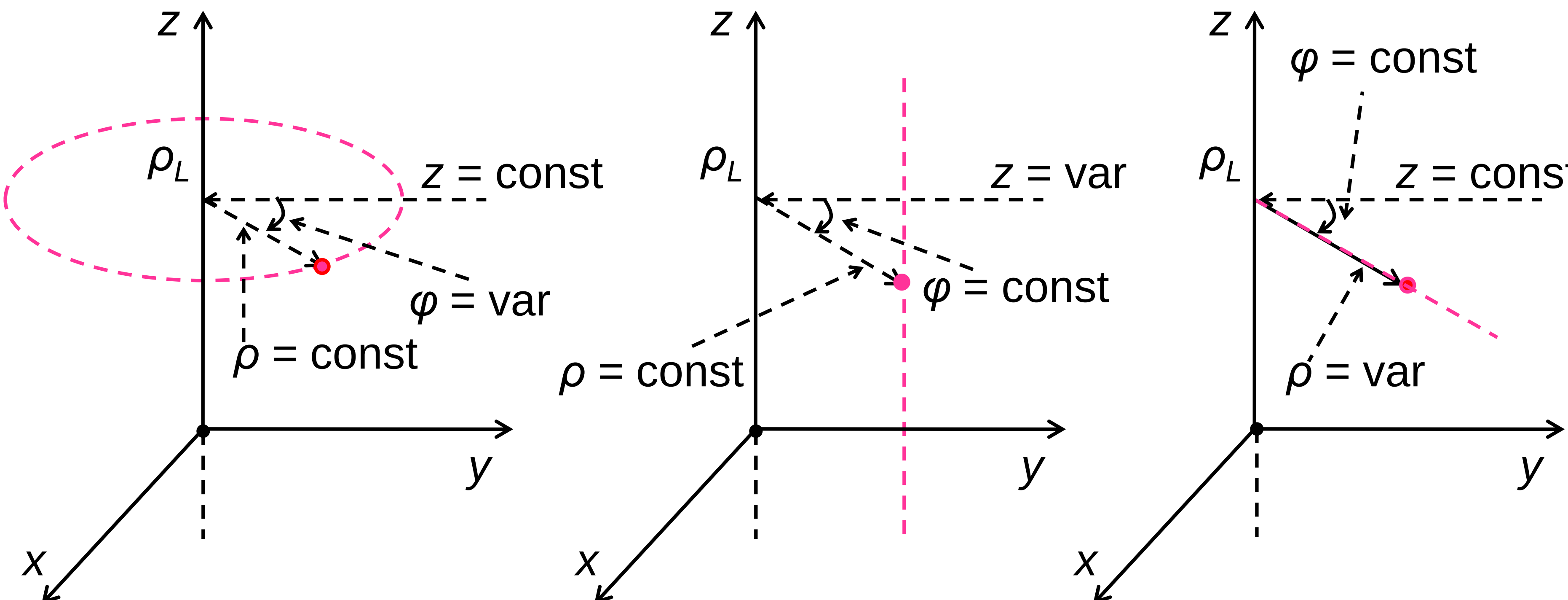
→ Coi tia điện tử (dây dẫn tích điện) có ***mật độ điện tích đường*** ρ_L (C/m)

$$\boxed{\rho_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L}}$$

- Xét dây dẫn thẳng, tích điện, dài vô hạn nằm trên trục z → **E**.
- Để đơn giản hóa việc tính **E** của điện tích đường:
  - Xét **E thay đổi theo các trục tọa độ**: ρ, φ, z
  - **E = E$_\rho$ + E$_\varphi$ + E$_z$, thành phần nào triệt tiêu**.

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

➢ **Sự thay đổi của E theo các các trục tọa độ**: *ρ*, *φ*, *z*



$$\left.\begin{array}{r}\rho = const\\ z = const\\ \varphi = \text{var}\end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{E} = const \qquad \left.\begin{array}{r}\rho = const\\ z = \text{var}\\ \varphi = const\end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{E} = const \qquad \left.\begin{array}{r}\rho = \text{var}\\ z = const\\ \varphi = const\end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{E} = \text{var}$$

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

➢ **$E = E_\rho + E_\varphi + E_z$, thành phần nào triệt tiêu**:

❖ Mỗi **vi phân độ dài** của điện tích đường đều **tạo ra E**.

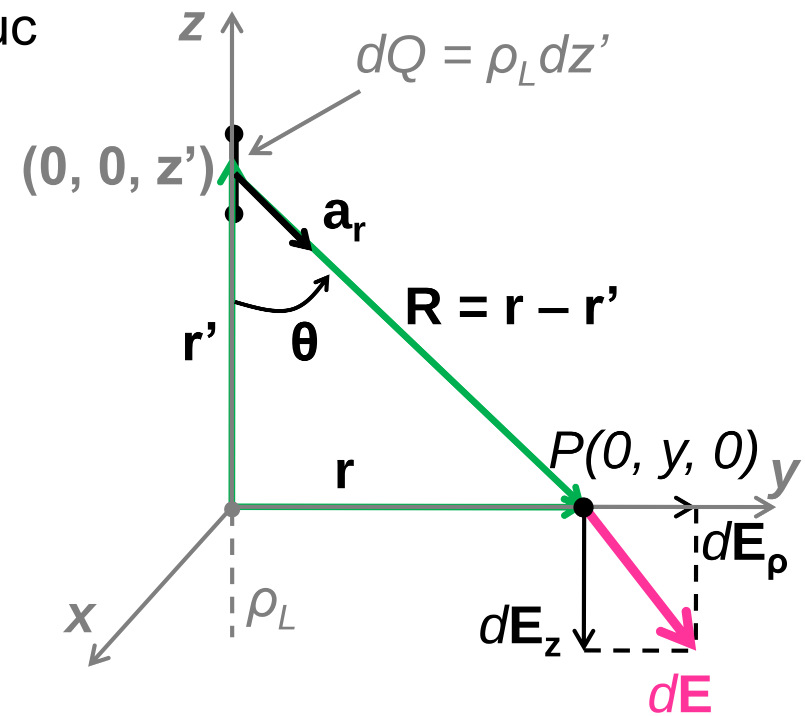
❖ Mỗi vi phân độ dài của điện tích đường **chỉ tạo ra thành phần E_ρ, E_z, không tạo ra thành phần E_φ ($E_\varphi = 0$)**.

❖ Thành phần **E_z tạo bởi hai vi phân độ dài đối xứng** trên trục *z* có **độ lớn bằng nhau** và **ngược chiều** → thành phần **E_z bị triệt tiêu**.

$$\boxed{E = E_\rho(\rho)}$$

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

- Xét đường dây dài vô hạn ρ_L nằm trên trục z hệ tọa độ trụ. Tính **E** tại điểm $P(0, y, 0)$.
- Vi phân cường độ điện trường $d\mathbf{E}$ tại P do vi phân điện tích $dQ = \rho_L dz'$ được tính theo công thức:



$$d\mathbf{E} = \frac{dQ(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

Trong đó: $\mathbf{r} = y\mathbf{a}_y = \rho\mathbf{a}_\rho$; $\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z$$

$$\rightarrow d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz'(\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \xrightarrow[\mathbf{E}_z \text{ triệt tiêu}]{\mathbf{E}_\varphi = 0} dE_\rho = \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

$$E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\rho\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{z'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho} \rightarrow \boxed{\mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho}$$

- Tổng quát: Tính **E** của điểm *P*(*ρ*,*φ*,*z*) bất kỳ.

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho_L dz'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

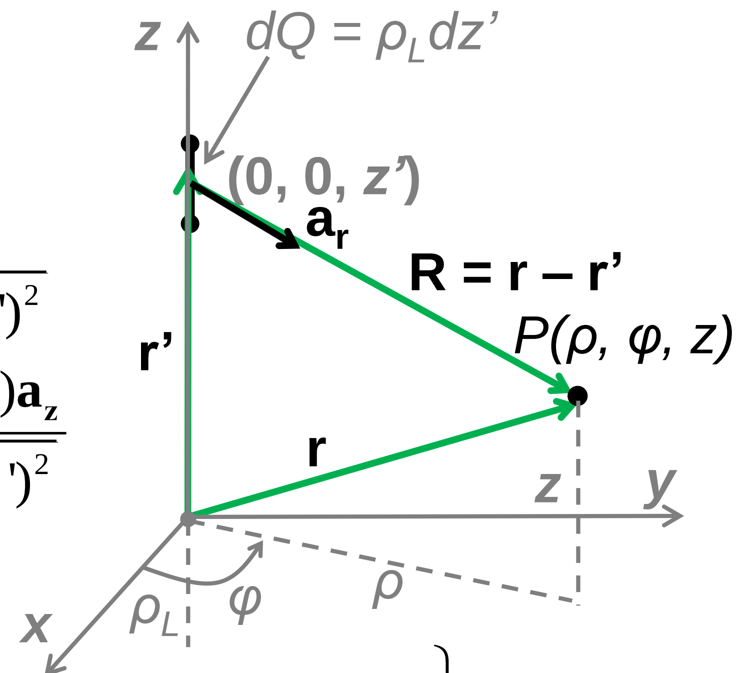
Trong đó: $\mathbf{r} = \rho\mathbf{a}_\rho + z\mathbf{a}_z$

$\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho + (z-z')\mathbf{a}_z \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{\rho^2+(z-z')^2} \\ \mathbf{a}_R = \dfrac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z-z')\mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L dz'\left[\rho\mathbf{a}_\rho + (z-z')\mathbf{a}_z\right]}{4\pi\varepsilon_0\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho dz'\mathbf{a}_\rho}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z-z')dz'\mathbf{a}_z}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\right\}$$



V. Cường độ điện trường của điện tích đường

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho dz'\mathbf{a}_\rho}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z-z')dz'\mathbf{a}_z}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\right\}$$

a_ρ, a_z là hàm của z’ ???

- Vector đơn vị **a_ρ, a_z** luôn const (*giá trị và hướng*) khi *z’* thay đổi.

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\mathbf{a}_\rho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho dz'}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}+\mathbf{a}_z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z-z')dz'}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\mathbf{a}_\rho\rho\frac{1}{\rho^2}\left.\frac{-(z-z')}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\right|_{-\infty}^{\infty}+\mathbf{a}_z\left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\right|_{-\infty}^{\infty}\right\}$$

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left[\mathbf{a}_\rho\frac{2}{\rho}+\mathbf{a}_z 0\right]\longrightarrow\boxed{\mathbf{E}=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho}$$

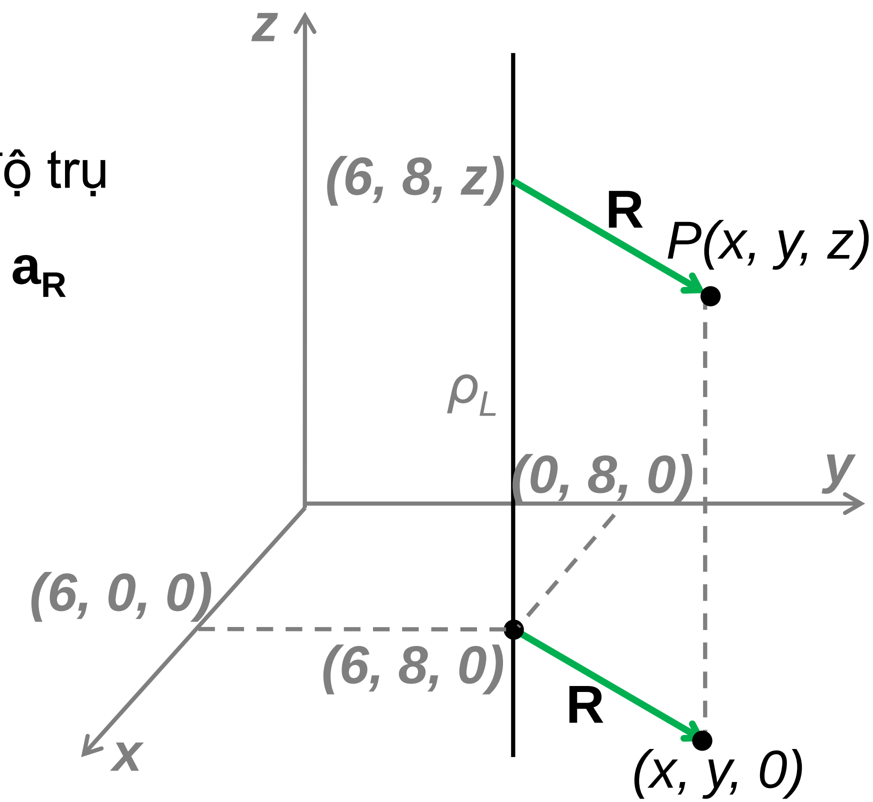
Vector cường độ điện trường **E** của điện tích đường **tỉ lệ nghịch với khoảng cách**.

V. Cường độ điện trường của điện tích đường

Ví dụ 2.4: Xét đường dây tích điện dài vô hạn nằm song song với trục *z*, tại điểm *x* = 6, *y* = 8. Tính vector cường độ điện trường **E** tại điểm *P(x, y, z).*

- Xuất phát từ công thức: $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho$
- Thay ρ bằng R (bán kính trong hệ tọa độ trụ với trục của trụ là dây tích điện) → $\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\mathbf{R}$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}}\mathbf{a}_\mathbf{R}$$



Trong đó: $\mathbf{a}_\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \dfrac{(x-6)\mathbf{a}_\mathbf{x} + (y-8)\mathbf{a}_\mathbf{y}}{\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}}$

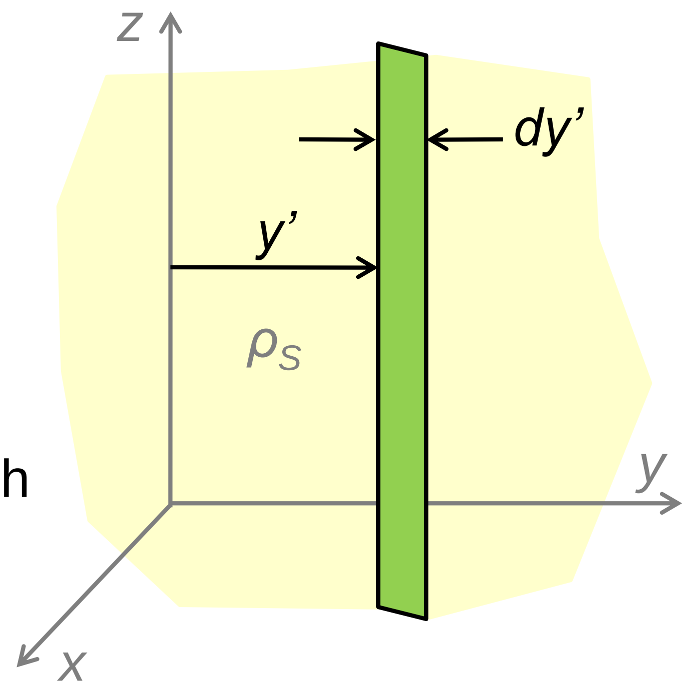
$$\boxed{\rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(x-6)\mathbf{a}_\mathbf{x} + (y-8)\mathbf{a}_\mathbf{y}}{(x-6)^2+(y-8)^2}}$$

Chương 2: Khái niệm cơ bản về trường điện từ

VI. Cường độ điện trường của điện tích mặt

➢ ***Điện tích mặt*** là mặt phẳng (*vd: bản cực của tụ điện*) có điện tích phân bố đều, đặc trưng bởi *hàm mật độ điện tích mặt* ρ_S (C/m^2).

$$\boxed{\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}}$$



➢ Xét tấm phẳng tích điện rộng vô hạn, có mật độ điện tích mặt ρ_S đặt trên mặt phẳng yOz.

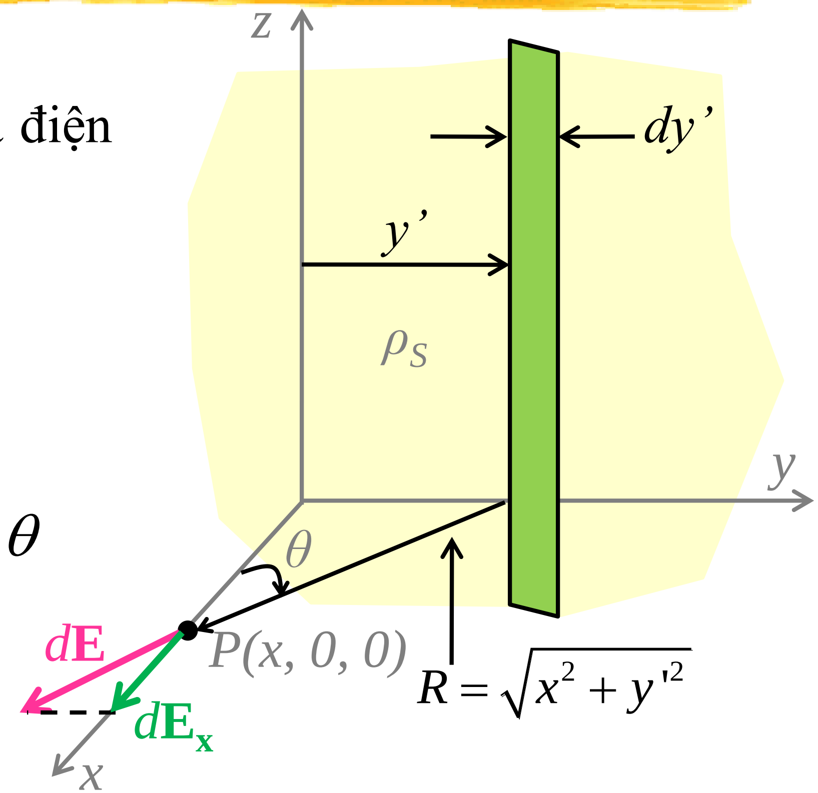
➢ Chia mặt phẳng tích điện thành các dải điện tích dài vô hạn, có độ rộng *dy'* rất nhỏ (*dy'* → 0).

➢ Coi mỗi dải điện tích là một điện tích đường.

$$\rho_L = \frac{dQ}{L} = \frac{\rho_S dS}{L} = \frac{\rho_S L dy'}{L} \rightarrow \boxed{\rho_L = \rho_S dy'}$$

VI. Cường độ điện trường của điện tích mặt

➢ Xét *P(x, 0, 0)*, áp dụng công thức tính **E** của điện tích đường:



$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 R}\mathbf{a_R} \rightarrow d\mathbf{E} = \frac{\rho_S dy'\mathbf{a_R}}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

$$d\mathbf{E_x} = d\mathbf{E}\cos\theta \rightarrow dE_x = \frac{\rho_S dy'}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y'^2}}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}} \quad \rightarrow dE_x = \frac{\rho_S}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x dy'}{x^2 + y'^2}$$

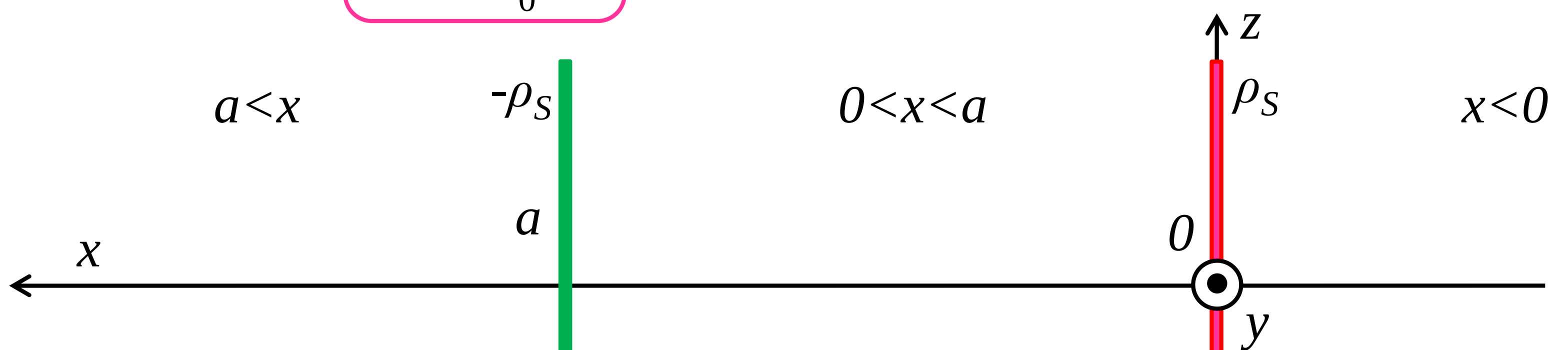
$$\rightarrow E_x = \frac{\rho_S}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2 + y'^2}dy' = \frac{\rho_S}{2\pi\varepsilon_0} artg\left.\frac{y'}{x}\right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a_N}}$$

$\mathbf{a_N}$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng tích điện

VI. Cường độ điện trường của điện tích mặt

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a_N}}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$



$a<x$:

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a_x}$$

$$\mathbf{E}_- = -\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a_x}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

$0<x<a$:

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a_x}$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a_x}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\mathbf{a_x}$$

$x<0$:

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a_x}$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a_x}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

Cường độ điện trường của các vật mang điện

Điện tích điểm

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Điện tích khối

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Điện tích đường

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_{\boldsymbol{\rho}}$$

Điện tích mặt

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_{\mathbf{N}}$$

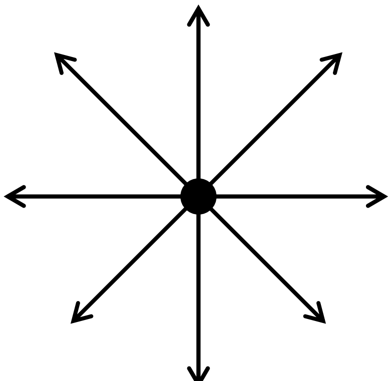
Chương 2: Khái niệm cơ bản về trường điện từ

VII. Đường sức - Ống sức

- **Đường sức:**

  - Đường sức là một ***đường hình học*** minh họa một cách trực quan ***sự phân bố chiều của cường độ trường*** trong không gian.
  - Các ***tiếp tuyến*** tại mọi điểm trong không gian của đường sức đều trùng với ***phương của vector cường độ điện trường***.
  - Đường sức ***xuất phát từ miền mang hạt điện dương*** & ***tận cùng ở miền mang hạt điện âm*** → đường sức cho ta biết sự phân bố của chất và trường.

Ví dụ: Xét **E** của một dây dẫn thẳng, dài vô hạn: $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho$

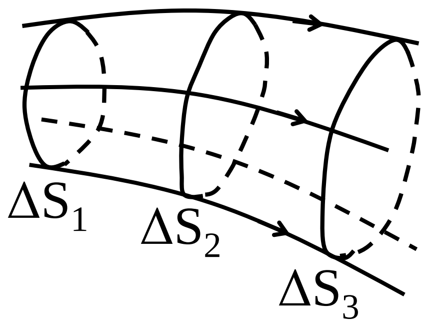


- Đặt một điện tích dương, tự do trên một đường sức, điện tích đó sẽ tăng tốc theo hướng của đường sức tại điểm đặt.

VII. Đường sức - Ống sức

➢ **Ống sức:**

❖ Cho một mặt ΔS và vẽ một tập những đường sức tỳ lên chu vi của mặt ΔS → các đường sức sẽ làm thành một mặt hình ống bao lấy một miền không gian, gọi là ***ống sức***.



❖ Ống sức cho biết ***chiều của cường độ trường*** ở lân cận mỗi điểm và sự phân bố ***độ lớn tương đối*** của cường độ trường **E** dọc theo ống (cường độ điện trường tỉ lệ nghịch với tiết diện của ống sức).

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

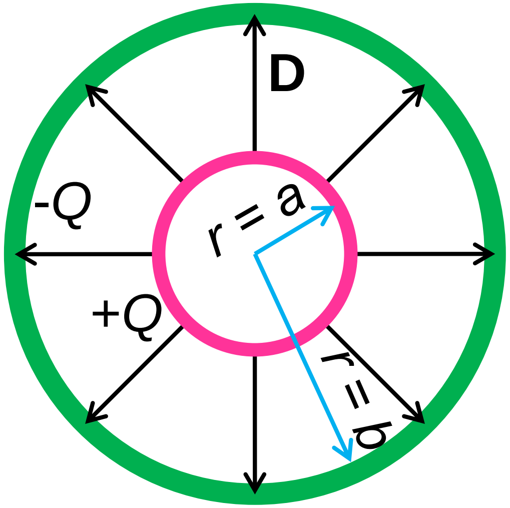
I. Dịch chuyển điện

- **Thí nghiệm của M. Faraday (1837):**
  - Hai mặt cầu kim loại đặt đồng tâm, mặt cầu ngoài gồm 2 nửa bán cầu có thể gắn chặt với nhau.
  - Lấp đầy khoảng không gian (2cm) giữa 2 mặt cầu bằng dung dịch điện môi.
  - Gỡ bỏ mặt cầu ngoài, nạp lượng +*Q* cho mặt cầu trong.
  - Lắp mặt cầu ngoài và đổ đầy chất điện môi giữa 2 mặt cầu.
  - Nối đất mặt cầu ngoài.
  - Đo điện tích trên mặt cầu ngoài được kết quả -*Q*.

$$\boxed{\Psi = Q}$$

- **Hiện tượng:** Tổng điện tích mặt cầu ngoài có trị tuyệt đối bằng tổng điện tích nạp vào mặt cầu trong, không phụ thuộc chất điện môi giữa 2 mặt cầu.
- **Kết luận:** Tồn tại một sự ***dịch chuyển điện (ψ)*** từ mặt cầu trong ra ngoài:

I. Dịch chuyển điện



- Sự dịch chuyển điện ***ψ*** diễn ra trên toàn bộ diện tích bề mặt của quả cầu: $S_a = 4\pi a^2 (m^2)$
- Để đặc trưng cho khả năng dịch chuyển điện của một bề mặt, người đưa ra khái niệm vector ***mật độ dịch chuyển điện*** **D** [*C/m*^{2}]:

$$\mathbf{D}\big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r} \qquad \boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r}} \qquad \mathbf{D}\big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2}\mathbf{a_r}$$

- Hướng của **D** tại một điểm là ***hướng dòng dịch chuyển điện*** tại điểm đó.
- Độ lớn của **D** tại một điểm cho biết ***giá trị dịch chuyển điện trung bình*** qua mặt vuông góc với đường dịch chuyển.

I. Dịch chuyển điện

- Trong chân không:
  - ***Điện tích điểm***:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r} \\ \mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a_r} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}}$$

  - ***Với điện tích khối:***

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a_r} \longrightarrow \mathbf{D} = \int_V \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2}\mathbf{a_r}$$

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

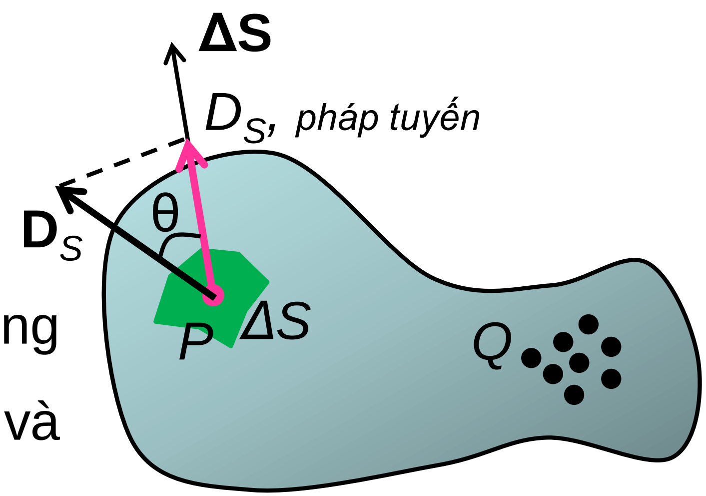
III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

II. Luật Gauss

1. Phát biểu: ***Tổng thông lượng chảy ra khỏi mặt kín S bằng tổng điện tích tự do bao trong mặt kín đó.***



- Xét các điện tích điểm bao bọc bởi mặt kín bất kỳ.
- Tại mỗi diện tích *S* của mặt kín, có thông lượng $\mathbf{D}_S$ đi qua ($\mathbf{D}_S$ thay đổi về độ lớn và hướng tại mỗi vị trí bề mặt *S*).
- Gọi Δψ: thông lượng qua *ΔS*: $\Delta\psi = D_{S,\text{pháp tuyến}}\,\Delta S = D_S\,\Delta S\cos\theta = \mathbf{D}_S \cdot \Delta\mathbf{S}$
- Tổng thông lượng qua mặt kín là (*công thức luật Gauss*):

$$\boxed{\psi = \int d\psi = \oint_{matkin} \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = \textbf{Điện tích trong mặt kín} = Q}$$

II. Luật Gauss

1. Phát biểu

$$\psi = \int d\psi = \oint_{\text{matkin}} \mathbf{D}_S . d\mathbf{S}$$ = Điện tích trong mặt kín = Q

Điện tích điểm

$$Q = \sum Q_n$$

Điện tích đường:

$$Q = \int \rho_L dL$$

Điện tích mặt

$$Q = \int_S \rho_S dS$$

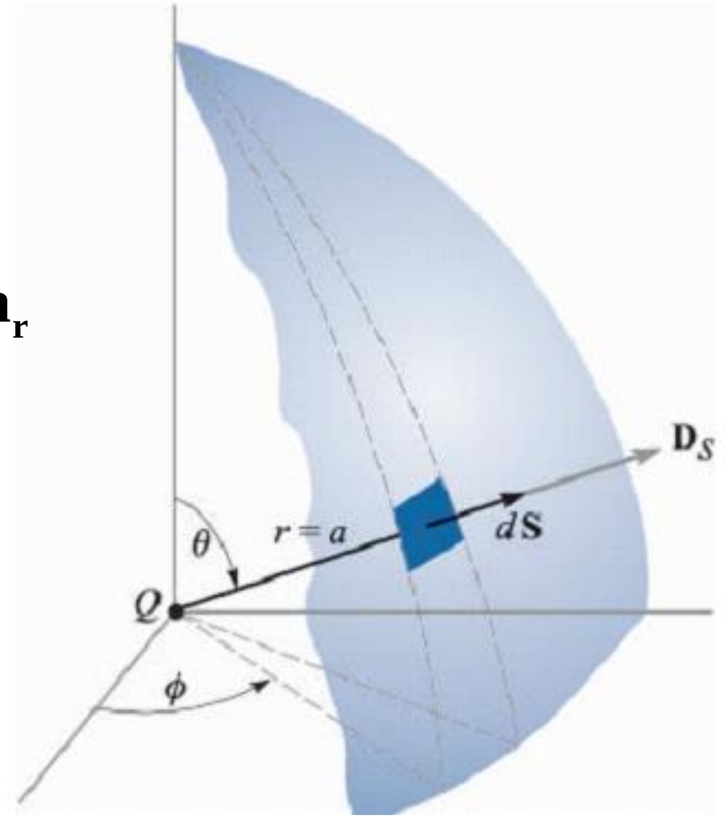
Điện tích khối:

$$Q = \int_V \rho_V dv$$

$$\oint_S \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = \int_V \rho_V dv$$

II. Luật Gauss

1. Phát biểu



- Xét điện tích điểm Q đặt tại tâm cầu, bán kính a
- Khi đó: $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a_r} \rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r}$
- Trên bề mặt cầu bán kính *a:* $\mathbf{D} = \dfrac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r}$
- Mặt cong d**S** trên cầu có diện tích:

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

- Vậy tổng thông lượng qua mặt cầu:

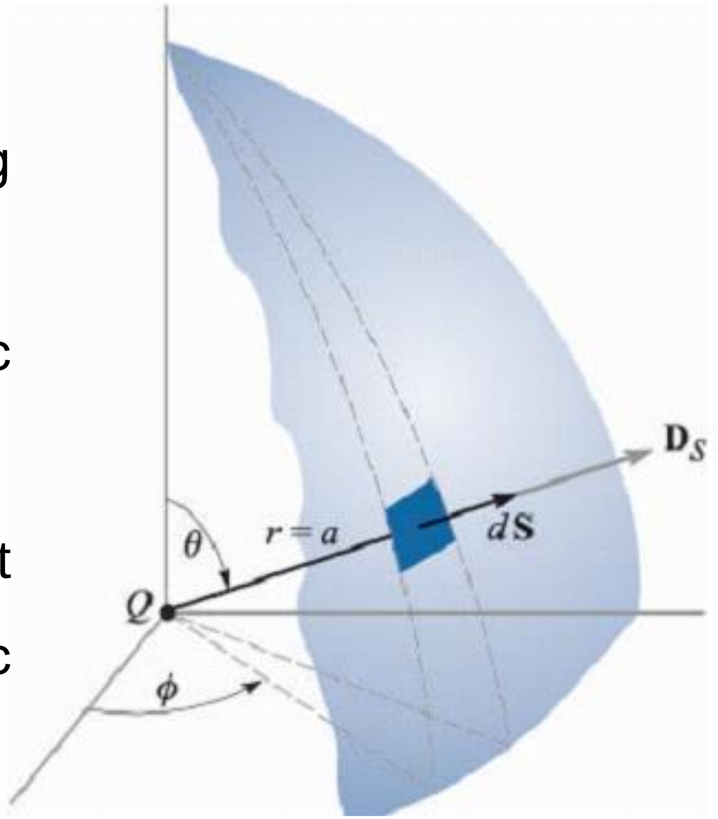
$$\oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a_R}.\mathbf{a_R} = \oint_S \frac{Q}{4\pi}\sin\theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{Q}{4\pi}\sin\theta d\theta d\phi$$

II. Luật Gauss

1. Phát biểu

$$\oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi}\sin\theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi} d\phi = Q$$

- ***Kết luận:***
  - Tổng thông lượng qua mặt cầu kín bằng tổng điện tích bên trong của mặt cầu đó.
  - Thí nghiệm của M. Faraday đã được kiểm chứng bằng luật Gauss..
  - Đóng góp của Gauss không phải phát biểu luật mà tìm ra công thức toán học cho luật.



II. Luật Gauss

1. Phát biểu

Ví dụ 3.1: Tính tổng thông lượng qua hình lập phương giới hạn bởi 6 mặt phẳng *x*, *y*, *z* = ± 5, biết sự phân bố điện tích trong hình lập phương là:

- Điện tích điểm Q_1 = 0,1μC tại *A*(1, -2, 3), Q_2 = 0,14μC tại *B*(-1, 2, -2).
  - Áp dụng công thức: $\psi = \int d\psi = \oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = Q$
  - Tổng thông lượng qua hình lập phương: ψ = *Q* = 0,1 + 0,14 = 0,24 μC

- Điện tích đường ρ_L = π μC/m tại *x* = -2 và *y* = 3

$$\psi = Q = \int_{-5}^{5} \rho_L dz = \rho_L \left. z \right|_{-5}^{5} = 10\pi = 31,4\mu C$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng luật Gauss

$$\boxed{Q = \oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S}}$$

- Luật Gauss được sử dụng để tính **D** (**E**) khi biết *Q*
- Việc tính **D** (**E**) sẽ đơn giản hơn nếu chọn được mặt kín thỏa mãn 2 điều kiện (***mặt Gauss***):
  - ❖ $\mathbf{D}_S$ vuông góc hoặc tiếp tuyến với mặt kín tại mọi điểm của mặt kín

$$\mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \begin{cases} D_S dS \\ 0 \end{cases}$$

  - ❖ $\mathbf{D}_S$ = const tại những vị trí trên mặt kín mà $\mathbf{D}_S.d\mathbf{S} \neq 0$

$$\rightarrow Q = \oint_S D_S dS = D_S \oint_S dS$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.2: Xét điện tích điểm *Q* đặt tại gốc tọa độ của hệ tọa độ cầu. Tính vector cường độ điện trường **E.**

- Mặt Gauss bao quanh điện tích điểm *Q* là các mặt cầu với mọi bán kính *r*, có tâm trùng với vị trí của điện tích điểm

$$Q = \oint_{cau} \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = D_S \oint_{cau} dS = D_S \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = D_S 4\pi r^2$$

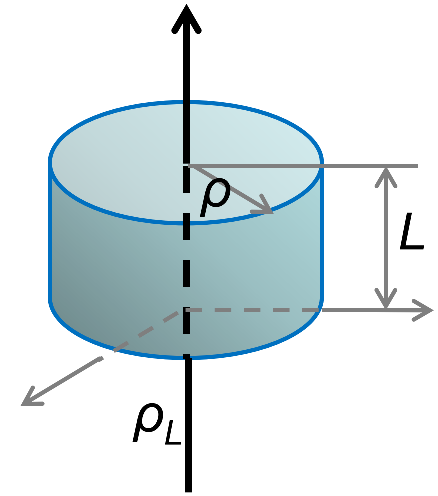
- Với mọi giá trị của *r*, $\mathbf{D}_S$ luôn chảy qua theo phương pháp tuyến, ta có

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_R \rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r}$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.3: Xét một dây dẫn thẳng, dài vô hạn đặt trên trục *z* của hệ tọa độ trụ. Tính vector cường độ điện trường **E**.



- Nhận xét: $\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$ và $D_\rho = f(\rho)$
- Mặt Gauss đối với hệ tọa độ trụ sẽ là mặt trụ bao kín lấy đường dây tích điện $Q = \oint_{\text{tru tron}} \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = D_S \oint_{xungquanh} dS + 0\oint_{tren} dS + 0\oint_{duoi} dS$

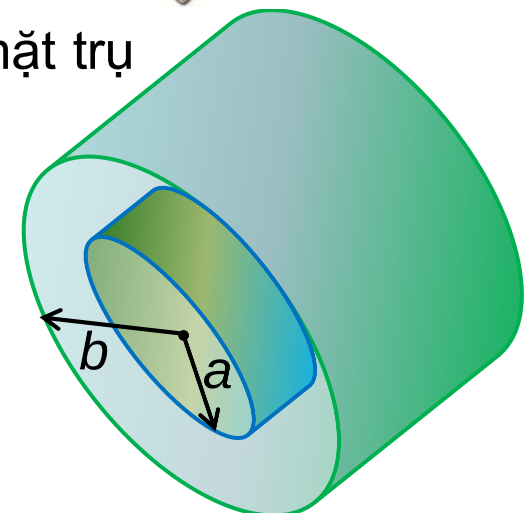
$$Q = D_S \int_{z=0}^{z=L} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho d\varphi dz = D_S 2\pi\rho L \rightarrow D_S = \frac{Q}{2\pi\rho L} = \frac{\rho_L L}{2\pi\rho L} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

- Vậy ta có: $\boxed{D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \rightarrow E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}}$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.4: Xét hai mặt trụ tròn đồng trục dẫn điện, dài vô tận (*cáp đồng trục*). Bán kính mặt trụ trong là *a*, bán kính mặt trụ ngoài là *b*. Mật độ điện tích mặt của mặt trụ trong là ρ_S.



- Mặt Gauss: Mặt trụ tròn độ dài *L*, bán kính $a < \rho < b$

$$Q = D_S 2\pi\rho L$$

- Tổng điện tích vật dẫn trụ tròn $\rho = a$, độ dài $z = L$ là:

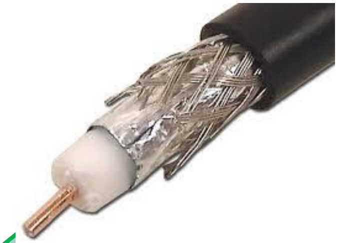
$$Q = \int_{z=0}^{z=L}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho_S a d\varphi dz = 2\pi a L \rho_S \rightarrow D_S = \frac{a\rho_S}{\rho} \quad \mathbf{D} = \frac{a\rho_S}{\rho}\mathbf{a}_\rho \quad (a < \rho < b)$$

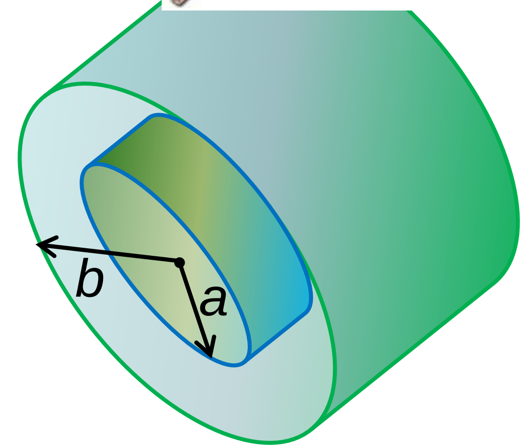
- Mặt khác: $\rho_L = Q\big|_{L=1m} = \rho_S S\big|_{L=1m} = \rho_S 2\pi a \rightarrow \rho_S = \dfrac{\rho_L}{2\pi a}$

- Vậy ta có: $\boxed{\mathbf{D} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho}$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss





➢ Sự dịch chuyển điện từ bề mặt của lõi hình trụ tròn bên trong sẽ hướng ra ngoài và gặp mặt tích điện âm của mặt trong của hình trụ tròn ngoài. Do đó tổng điện tích của bề mặt trụ tròn ngoài là:

$$Q_{\text{mat tru ngoai}} = -Q_{\text{mat tru trong}}$$

Mặt trụ trong

$$Q_{\text{mat tru trong}} = 2\pi a L \rho_{S,\text{mat tru trong}}$$

Mặt trụ ngoài

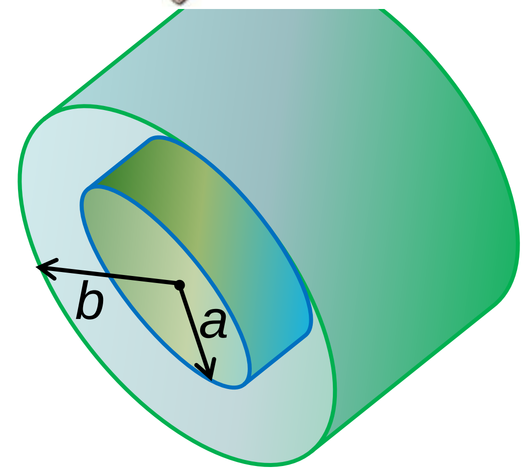
$$Q_{\text{mat tru ngoai}} = 2\pi b L \rho_{S,\text{mat tru ngoai}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\rho_{S,\text{mat tru ngoai}} = -\frac{a}{b}\rho_{S,\text{mat tru trong}}}$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

- Chọn mặt Gauss là hình trụ tròn đồng trục với cáp đồng trục, có bán kính *ρ* > *b* (*ρ* < *a*), ta có:



$$\psi_{b<r<a} = D_S 2\pi\rho L = Q_{\text{mat tru ngoai}} + Q_{\text{mat tru trong}} = 0$$

$$\rightarrow D_S = 0 \qquad (b<\rho<a)$$

- Nhận xét:
  - Cáp đồng trục: Không tồn tại điện trường bên ngoài & bên trong cáp.
  - Một cáp đồng trục với độ dài *L* hữu hạn, hở 2 đầu, có *L* >> *b* → tụ đồng trục

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.5: Xét cáp đồng trục: *L* = 0,5m, bán kính lõi *1mm*, bán kính vỏ *4mm*. Giữa lõi & vỏ là không khí. Tổng điện tích của lõi: *30nC*. Tính mật độ điện tích trên lõi, vỏ ; Tính **E**, **D**.

- Mật độ điện tích mặt:

$$\rho_{S,\text{loi}} = \frac{Q_{\text{loi}}}{2\pi aL} = \frac{30(10^{-9})}{2\pi(10^{-3})(0,5)} = 9,55\mu C/m^2$$

$$\rho_{S,\text{vo}} = \frac{Q_{\text{vo}}}{2\pi bL} = \frac{-30\times10^{-9}}{2\pi(4\times10^{-3})(0,5)} = -2,39\mu C/m^2$$

- Tính vector cường độ trường **E** và vector dịch chuyển điện **D**:

$$D_\rho\Big|_{10^{-3}<\rho<4.10^{-3}} = \frac{a\rho_{S,\text{loi}}}{\rho} = \frac{10^{-3}(9,55\times10^{-6})}{\rho} = \frac{9,55}{\rho}nC/m^2$$

$$E_\rho\Big|_{10^{-3}<\rho<4.10^{-3}} = \frac{D_\rho}{\varepsilon_0} = \frac{9,55\times10^{-9}}{8,854\times10^{-12}\rho} = \frac{1079}{\rho}V/m$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.6: Hệ tọa độ cầu có: Điện tích điểm Q = 0,25μC tại tâm cầu; 2 mặt cầu tích điện: (r_1 = 1cm, ρ_S = 2mC/m^2) & (r_2 = 1,8cm, ρ_S = -0,6mC/m^2). Tính **D** tại: r_3 = 0,5cm ; r_4 = 1,5cm ; r_5 = 2,5cm. Tính mật độ điện tích mặt tại vị trí r_6 = *3cm* để có **D** = 0 tại vị trí r_7 = *3,5cm*.

Giải:

- r_3 = 0,5cm: Mặt cầu Gauss bán kính r_3 = 0,5cm bao điện tích điểm Q

$$\mathbf{D}(r_3 = 0,5cm) = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r} = \frac{0.25}{4\pi 0,005^2}\mathbf{a_r} = 796\mathbf{a_r}\mu C/m^2$$

- r_4 = 1,5cm: Mặt cầu Gauss bán kính r_4 = 1,5cm bao điện tích điểm Q và mặt cầu tích điện r_1 = 1cm, ρ_S = 2mC/m^2

$$\mathbf{D}(r_4 = 1,5cm) = \frac{\sum Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r} = \frac{0,25.10^{-6} + 4\pi.0,01^2.2.10^{-3}}{4\pi.0,015^2}\mathbf{a_r} = 977,3\mathbf{a_r}\mu C/m^2$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.6: Hệ tọa độ cầu có: Điện tích điểm Q = 0,25μC tại tâm cầu; 2 mặt cầu tích điện: (r_1 = 1cm, ρ_S = 2mC/m^2) & (r_2 = 1,8cm, ρ_S = -0,6mC/m^2). Tính **D** tại: r_3 = 0,5cm ; r_4 = 1,5cm ; r_5 = 2,5cm. Tính mật độ điện tích mặt tại vị trí r_6 = *3cm* để có **D** = 0 tại vị trí r_7 = *3,5cm*.

Giải:

- r_5 = 2,5cm: Mặt cầu Gauss bán kính r_5 = 2,5cm bao điện tích điểm Q và cả 2 mặt cầu tích điện

$$\mathbf{D}(r_5 = 2,5cm) = \frac{\sum Q}{4\pi a^2}\mathbf{a_r}$$

$$\rightarrow \mathbf{D} = \frac{0,25.10^{-6} + 4\pi.0,01^2.2.10^{-3} + 4\pi.0,018^2.(-0,6.10^{-3})}{4\pi.0,025^2}\mathbf{a_r} = 40,79\mathbf{a_r}\mu C/m^2$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.6: Hệ tọa độ cầu có: Điện tích điểm Q = 0,25μC tại tâm cầu; 2 mặt cầu tích điện: (r_1 = 1cm, ρ_S = 2mC/m^2) & (r_2 = 1,8cm, ρ_S = -0,6mC/m^2). Tính **D** tại: r_3 = 0,5cm ; r_4 = 1,5cm ; r_5 = 2,5cm. Tính mật độ điện tích mặt tại vị trí r_6 = *3cm* để có **D** = 0 tại vị trí r_7 = *3,5cm*.

Giải:

- Để có **D** = 0 tại r_7 = *3,5cm* thì mặt Gauss tại vị trí r_6 phải có điện tích bằng tổng điện tích bao bên trong, và trái dấu.

$$\rightarrow Q = -\left[0,25.10^{-6} + 4\pi.0,01^2.2.10^{-3} + 4\pi.0,018^2.(-0,6.10^{-3})\right] = -320,37nC$$

- Vậy mật độ điện tích mặt của mặt cầu bán kính r_6 = 3cm là

$$\rho_S = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{-320,37}{4\pi 0,03^2} = -28,33\mu C / m^2$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

- Việc áp dụng luật Gauss (tính **D**, **E**) cần tìm mặt Gauss (thỏa mãn 2 điều kiện: $\mathbf{D}_S$ vuông góc hoặc $\mathbf{D}_S$ = const trên mặt kín)

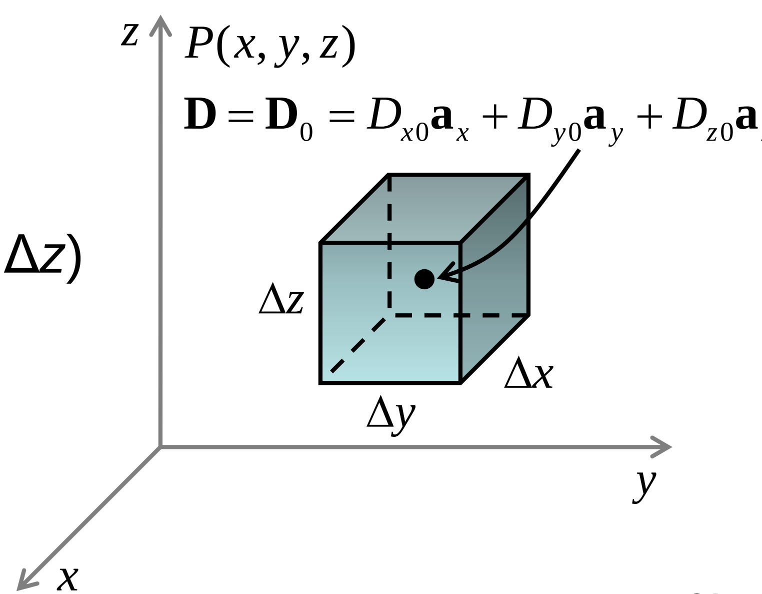
- Nếu khó tìm mặt Gauss: Chọn mặt kín rất nhỏ sao cho $\mathbf{D}_S \approx$ const trên mặt kín đó.

- Xét *P(x, y, z)*:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$$

- Chọn mặt kín hình lập phương (Δx, Δy, Δz) có tâm là điểm *P:* **D** ≈ const trên từng mặt.

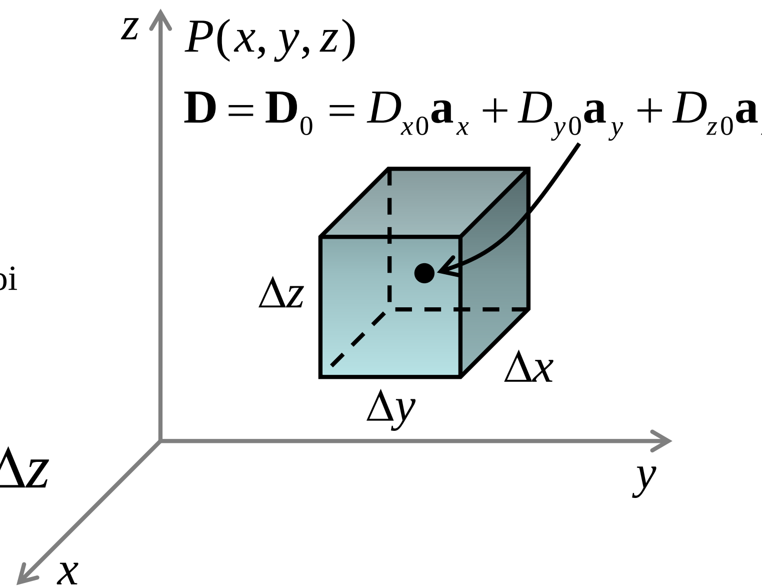
$$Q = \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$



II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

$$Q=\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}=\int_{\text{truoc}}+\int_{sau}+\int_{\text{trai}}+\int_{\text{phai}}+\int_{\text{tren}}+\int_{\text{duoi}}$$



- Xét mặt trước:

$$\int_{\text{truoc}}\simeq\mathbf{D}_{\text{truoc}}.\Delta\mathbf{S}_{\text{truoc}}=\mathbf{D}_{\text{truoc}}.\Delta y\Delta z\mathbf{a}_x=D_{x,\text{truoc}}\Delta y\Delta z$$

- Do P là tâm hình lập phương → khoảng cách từ mặt trước đến P là $\Delta x/2$

$$D_{x,\text{truoc}}\simeq D_{x0}+\frac{\Delta x}{2}(\text{toc do thay doi cua } D_x\ \textit{theo } x)=D_{x0}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

trong đó D_{x0} là giá trị của D_x tại P

- Vậy ta có: $$\int_{\text{truoc}}\simeq\left(D_{x0}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

- Tương tự, mặt sau có: $\int_{sau} \simeq \mathbf{D}_{sau}.\Delta\mathbf{S}_{sau} = \mathbf{D}_{sau}.(-\Delta y \Delta z \mathbf{a}_x) = -D_{x,sau}\Delta y \Delta z$

$$D_{x,sau} \simeq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \times (\text{toc do thay doi cua } D_x \text{ theo } x) = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

$$\rightarrow \int_{sau} \simeq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

- Khi đó ta có: $\int_{\text{truoc}} + \int_{sau} \simeq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$

- Tương tự xét cặp mặt (phải - trái), (trên - dưới):

$$\int_{\text{phai}} + \int_{\text{trai}} \simeq \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad \int_{\text{tren}} + \int_{\text{duoi}} \simeq \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

➢ Tóm lại:

$$Q = \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\boxed{Q_{\Delta v} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v}$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.7: Xác định tổng điện tích của khối thể tích $10^{-9}m^3$ đặt tại gốc tọa độ biết vector dịch chuyển điện: $\mathbf{D} = e^{-x}\sin y\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z (C/m^2)$

- Độ biến thiên của **D** theo các trục *x, y, z* là:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x}\sin y \qquad \frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x}\sin y \qquad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

- Tại gốc tọa độ ta có

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x}\sin y = 0 \qquad \frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x}\sin y = 0 \qquad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

- Vậy tổng điện tích của $10^{-9}m^3$ đặt tại gốc tọa độ là:

$$Q_{\Delta v} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v = 2\Delta v = 2.10^{-9} = 2nC$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.8: Trong chân không: $\mathbf{D} = 8xyz^4\mathbf{a}_x + 4x^2z^4\mathbf{a}_y + 16x^2yz^3\mathbf{a}_z\,(pC/m^2)$

a. Tìm thông lượng qua hộp chữ nhật: *z*=2, 0<*x*<2, 1<*y*<3 theo hướng $\mathbf{a}_z$.

b. Tính **E** tại *P(2, -1, 3)*

c. Tính tổng điện tích quả cầu có thể tích $10^{-12}m^3$ đặt tại *P(2, -1, 3)*.

Giải:

a. Thông lượng qua hộp chữ nhật *z = 2, 0 < x < 2, 1 < y < 3* theo hướng $\mathbf{a_z}$

$$\Phi = \int_0^2\int_1^3 \mathbf{D_z}dxdy = \int_0^2\int_1^3 16x^2y(2)^3dxdy = 16\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2\frac{1}{2}y^2\Big|_1^3 = 1365,33\,pC$$

b. **E** tại *P(2, -1, 3)* $\quad \mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\left[8.2(-1)3^4\mathbf{a}_x + 4.2^2.3^4\mathbf{a}_y + 16.2^2(-1)3^3\mathbf{a}_z\right].10^{-12}}{8,85.10^{-12}}$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -146,44\mathbf{a_x} + 146,4\mathbf{a_y} - 195,2\mathbf{a_z}V/m$$

II. Luật Gauss

2. Ứng dụng của luật Gauss

Ví dụ 3.8: Trong chân không: $\mathbf{D} = 8xyz^4\mathbf{a}_x + 4x^2z^4\mathbf{a}_y + 16x^2yz^3\mathbf{a}_z\,(pC/m^2)$

a. Tìm thông lượng qua hộp chữ nhật: *z=2, 0<x<2, 1<y<3* theo hướng $\mathbf{a}_z$.

b. Tính **E** tại *P(2, -1, 3)*

c. Tính tổng điện tích của quả cầu có thể tích $10^{-12}m^3$ đặt tại *P(2, -1, 3).*

Giải:

c. Tổng điện tích của quả cầu có thể tích 10^{-12}m^3 đặt tại *P*(2, -1, 3).

$$Q_{cau} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{P(2,-1,3)} \times 10^{-12} = 10^{-12}.(8yz^4 + 48x^2yz^2)\Big|_{P(2,-1,3)}$$

$$\rightarrow Q_{cau} \simeq -2,376.10^{-21}C$$

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

III. Dive

➢ Xuất phát từ công thức: $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q_{\Delta v} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \simeq \frac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

➢ Công thức định nghĩa Đive:

$$\boxed{Dive \text{ cua } \mathbf{A} = div\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}}$$

III. Dive

$$\boxed{Dive \text{ cua } \mathbf{A} = div\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}}$$

Hệ tọa độ Descartes: $div\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Hệ tọa độ trụ tròn: $div\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Hệ tọa độ cầu: $div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$

III. Dive

$$\textit{Dive}\ \text{cua}\ \mathbf{A} = div\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

- *div***A** (*dive của hàm mật độ thông lượng **A***) là thông lượng chảy ra từ mặt kín của mỗi đơn vị thể tích có thể tích tiến đến zero.
- *Div* là phép toán có ***đối số là vector***, nhưng cho ***kết quả là giá trị vô hướng.***
- *Div* cho biết *số lượng thông lượng* (trên mỗi đơn vị thể tích) chảy ra khỏi một mặt kín (không cho thông tin về hướng của thông lượng).

III. Dive

*Ví dụ 3.9: Tìm div***D** tại gốc tọa độ: **D** = $e^{-x}\sin y\,\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\,\mathbf{a}_y + 2z\,\mathbf{a}_z$

Giải:

➢ Áp dụng công thức tính *div*:

$$div\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = -e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + 2 = 2$$

➢ Giá trị *div***D** = *2* = *const* mà không phụ thuộc vào vị trí cần tính.

➢ Nếu đơn vị của **D** là C/m^2, khi đó đơn vị của *div***D** sẽ là C/m^3 (mật độ điện tích khối).

III. Dive

*Ví dụ 3.10: Tìm div***D** tại:

$$a)\ \mathbf{D} = (2xyz - y^2)\mathbf{a_x} + (x^2z - 2xy)\mathbf{a_y} + x^2y\mathbf{a_z} C/m^2 \ \texttt{tai}\ P_A(2,3,-1)$$

➢ Áp dụng công thức tính *div* trong hệ tọa Descartes:

$$div\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2yz - 2x + 0 = -10$$

$$b)\ \mathbf{D} = 2\rho z^2 \sin^2\varphi \mathbf{a_\rho} + \rho z^2 \sin 2\varphi \mathbf{a_\varphi} + 2\rho^2 z \sin^2\varphi \mathbf{a_z} C/m^2$$

$$\texttt{tai}\ P_B(\rho = 2, \varphi = 110^0, z = -1)$$

➢ Áp dụng công thức tính *div* trong hệ tọa độ trụ tròn:

$$div\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$div\mathbf{D} = 4z^2\sin^2\varphi + 2z^2\cos 2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi = 9$$

III. Dive

*Ví dụ 3.10: Tìm div***D** tại:

$$c)\ \mathbf{D} = 2r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{a_r} + r\cos\theta\cos\varphi\mathbf{a_\theta} - r\sin\varphi\mathbf{a_\varphi} C/m^2$$

$$\text{tai } P_C(r = 1.5, \theta = 30^0, \varphi = 50^0)$$

- Áp dụng công thức tính *div* trong hệ tọa độ cầu:

$$div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$div\mathbf{D} = 6\sin\theta\cos\varphi - \frac{\cos\varphi\cos 2\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} = 2,57$$

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh

- Từ công thức định nghĩa *div* có: $div\mathbf{D} = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$
- Mặt khác, theo luật Gauss: $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q \xrightarrow[\text{vi khối } \Delta v]{\text{Xét cho một}} \dfrac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \dfrac{Q}{\Delta v}$
- Xét vi khối có thể tích tiến đến zero: $\lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{Q}{\Delta v} = \rho_v$

$$\boxed{div\mathbf{D} = \rho_v}$$ (***Phương trinh Maxwell 1***)

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh

$$\boxed{div\mathbf{D} = \rho_v}$$

- Công thức Maxwell 1 áp dụng cho điện trường tĩnh và từ trường dừng
- ***Phát biểu***: ***Thông lượng trên một đơn vị thể tích chảy ra khỏi một vi khối rất nhỏ đúng bằng giá trị mật độ điện tích khối tại đó***
- Phương trình Maxwell 1 là ***dạng vi phân của luật Gauss*** vì:
  - Luật Gauss liên hệ giá trị thông lượng của một điện tích (vật mang điện) đi ra khỏi một mặt kín bao quanh.
  - Phương trình Maxwell 1 phát biểu về thông lượng trên mỗi đơn vị thể tích chảy ra khỏi một vi khối rất nhỏ (coi như 1 điện tích điểm).
- Luật Gauss là ***dạng tích phân của phương trình Maxwell 1***

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh

Ví dụ 3.11: Tính mật độ điện tích khối ρ_v trong không gian xung quanh của một điện tích điểm *Q* đặt tại gốc tọa độ.

Giải:

- Vector thông lượng **D** của điện tích điểm *Q* tại gốc tọa độ: $\mathbf{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r}$
- Áp dụng công thức tính *div***D** trong hệ tọa độ cầu:

$$div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\rightarrow div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}) = 0 \quad (\mathrm{r} \neq 0) \qquad \rightarrow \rho_v = 0$$

Vậy mật độ điện tích khối ρ_v của điện tích điểm *Q* bằng zero tại mọi điểm trong không gian và không xác định tại gốc tọa độ

Chương 3: Dịch chuyển điện - Luật Gauss - Dive

I. Dịch chuyển điện.

II. Luật Gauss.

III. Dive.

IV. Phương trình Maxwell 1 trong trường tĩnh.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive

1. Toán tử vector ∇

Định nghĩa một ***toán tử vector nabla*** (gọi là *toán tử del*)

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a_y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a_z}}$$

- Xét: $\nabla.\mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a_y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a_z}\right).\left(D_x\mathbf{a_x} + D_y\mathbf{a_y} + D_z\mathbf{a_z}\right)$

$$\boxed{\rightarrow \nabla.\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = div\mathbf{D}}$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

➢ Xuất phát từ luật Gauss, có: $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q$

➢ Mặt khác: $Q = \int_{\text{khoi}} \rho_v dv$ trong đó $\nabla.\mathbf{D} = \rho_v$

➢ Vậy ta có: $$\boxed{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{khoi}} \nabla.\mathbf{D}dv}$$

➢ ***Phát biểu***: *Tổng thành phần pháp tuyến của một trường vector bất kỳ có đạo hàm riêng trên một mặt kín đúng bằng tổng dive của trường vector đó trong không gian nằm trong mặt kín.*

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

2. Định lý Dive

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a_x} + x^2\mathbf{a_y}$ C/m^2 và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

$$\int_{truoc} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2}(\mathbf{D})_{x=1}.(dydz\mathbf{a_x}) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} D_x\Big|_{x=1}.(dydz) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} 2ydydz$$

$$\int_{truoc} = \int_{z=0}^{z=3} 4dz = 12C$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết **D** = $2xy\mathbf{a_x} + x^2\mathbf{a_y}$ *C/m²* và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

$$\int_{sau} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} (\mathbf{D})_{x=0}.(-dydz\mathbf{a_x}) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} D_x\Big|_{x=0}.(-dydz) = 0$$

$$\int_{phai} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} (\mathbf{D})_{y=2}.(dxdz\mathbf{a}_y) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} D_y\Big|_{y=2}.(dxdz) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2(dxdz)$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết **D** = $2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ *C/m²* và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng 0 < *x* < *1 ; 0* < *y* < *2 , 0* < *z* < *3*

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

$$\int_{trai} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} (\mathbf{D})_{y=0}.(-dxdz\mathbf{a}_y) = -\int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} D_y\Big|_{y=0}.(dxdz)$$

$$\rightarrow \int_{trai} = -\int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2(dxdz)$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m^2 và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

Vì $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$, không phụ thuộc vào z → **D** song song với mặt trên và mặt dưới → $\mathbf{D}.d\mathbf{S} = 0$

$$\rightarrow \int_{tren} = \int_{duoi} = 0$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết **D** = $2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m^2 và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế trái:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{truoc} + \int_{sau} + \int_{trai} + \int_{phai} + \int_{tren} + \int_{duoi}$$

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = 12 + 0 + \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2(dxdz) - \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2(dxdz) + 0 + 0$$

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = 12C$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{khoi}} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m^2 và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

- Vế phải:

$$\int_V \nabla.\mathbf{D}dV$$

$$\nabla.\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}2xy + \frac{\partial}{\partial y}x^2 + \frac{\partial}{\partial z}0 = 2y$$

$$\int_V \nabla.\mathbf{D}dV = \int_V 2ydV = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=1} 2ydxdydz = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} 2ydydz = \int_{z=0}^{z=3} 4dz = 12C$$

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{khoi} \nabla.\mathbf{D}dv$$

Ví dụ 3.12: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ *C/m²* và hình hộp chữ nhật giới hạn bởi mặt phẳng $0 < x < 1$; $0 < y < 2$, $0 < z < 3$

Giải:

$$\rightarrow \mathrm{VT} = \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV = \mathrm{VP} = 12C = Q$$

Nhận xét:

- Có thể dụng định lý *dive* để tính thông lượng chảy ra khỏi một mặt kín hoặc tính điện tích bên trong (được bao bởi) một mặt kín.
- Có 2 cách tính:
  - ***Luật Gauss***
  - ***Luật Dive***

V. Toán tử vector ∇ và định lý Dive.

2. Định lý Dive

Ví dụ 3.13: Kiểm nghiệm định lý Dive biết $\mathbf{D} = 6\rho\sin 0{,}5\varphi\,\mathbf{a}_\rho + 1{,}5\rho\cos 0{,}5\varphi\,\mathbf{a}_\varphi$ C/m^2 và phần mặt cong giới hạn bởi $\rho=2$, $\varphi=0$; $\varphi=\pi$, và $z=0$, $z=5$

Giải:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dv}$$

Đ/S: 225

Chương 4: Năng lượng - Điện thế

I. Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

II. Tích phân đường

III. Hiệu điện thế - Điện thế

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

V. Gradient thế

VI. Lưỡng cực

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

I. Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

- Xét một điện tích điểm Q dịch chuyển một đoạn $d\mathbf{L}$ dưới tác dụng của điện trường **E**. Khi đó lực do điện trường tác động lên điện tích: $\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E}$

- Thành phần lực điện trường theo hướng của $d\mathbf{L}$: $F_{EL} = \mathbf{F_E}.\mathbf{a}_L = Q\mathbf{E}.\mathbf{a}_L$

- Vậy lực cần tác dụng để dịch chuyển điện tích: $F_{td} = -Q\mathbf{E}.\mathbf{a}_L$

- Vậy công sinh ra để dịch chuyển điện tích điểm Q trong điện trường một đoạn dL là:

$$\boxed{dW = -Q\mathbf{E}.\mathbf{a}_L dL = -Q\mathbf{E}.d\mathbf{L}}$$

I. Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

$$\boxed{dW = -Q\mathbf{E}.d\mathbf{L}}$$

- Công dịch chuyển điện tích *Q* bị triệt tiêu nếu:
  - *Q = 0*, **E** *= 0*, *L = 0 hoặc*
  - **E** vuông góc với *d***L**

- Xét điện tích điểm *Q* đứng yên trong không gian có điện trường **E**.

- Công dịch chuyển điện tích *Q* trong một quãng đường hữu hạn:

$$\boxed{W = -Q\int_{\mathrm{dau}}^{\mathrm{cuoi}} \mathbf{E}.d\mathbf{L}}$$

I. Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

Ví dụ 4.1: Xét không gian có $\mathbf{E} = \frac{1}{z^2}\left(8xyz\mathbf{a_x} + 4x^2z\mathbf{a_y} - 4x^2y\mathbf{a_z}\right)V/m$. Tính vi phân công để dịch chuyển một điện tích *6nC* đi quãng đường dài 2µm từ điểm *P*(*2, -2, 3*) theo hướng: $\mathbf{A} = -\frac{6}{7}\mathbf{a_x} + \frac{3}{7}\mathbf{a_y} + \frac{2}{7}\mathbf{a_z}$

Giải:

$$\mathbf{E}_P = \frac{1}{z^2}\left(8xyz\mathbf{a_x} + 4x^2z\mathbf{a_y} - 4x^2y\mathbf{a_z}\right)\Big|_{P(2,-2,3)} = -10,67\mathbf{a_x} + 5,33\mathbf{a_y} + 3,56\mathbf{a_z}V/m$$

$$d\mathbf{L} = dL\mathbf{a}_L = 2.10^{-6}\frac{-\frac{6}{7}\mathbf{a_x} + \frac{3}{7}\mathbf{a_y} + \frac{2}{7}\mathbf{a_z}}{\sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2}} = -\frac{12}{7}\mathbf{a_x} + \frac{6}{7}\mathbf{a_y} + \frac{4}{7}\mathbf{a_z}(\mu m)$$

Vậy vi phân công dịch chuyển điện tích là:

$$dW = -Q\mathbf{E}_P.d\mathbf{L} = -6.10^{-9}(-10,67\mathbf{a_x} + 5,33\mathbf{a_y} + 3,56\mathbf{a_z})(-\frac{12}{7}\mathbf{a_x} + \frac{6}{7}\mathbf{a_y} + \frac{4}{7}\mathbf{a_z}) = -149,37J$$

Chương 4: Năng lượng - Điện thế

I. Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

II. Tích phân đường

III. Hiệu điện thế - Điện thế

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

V. Gradient thế

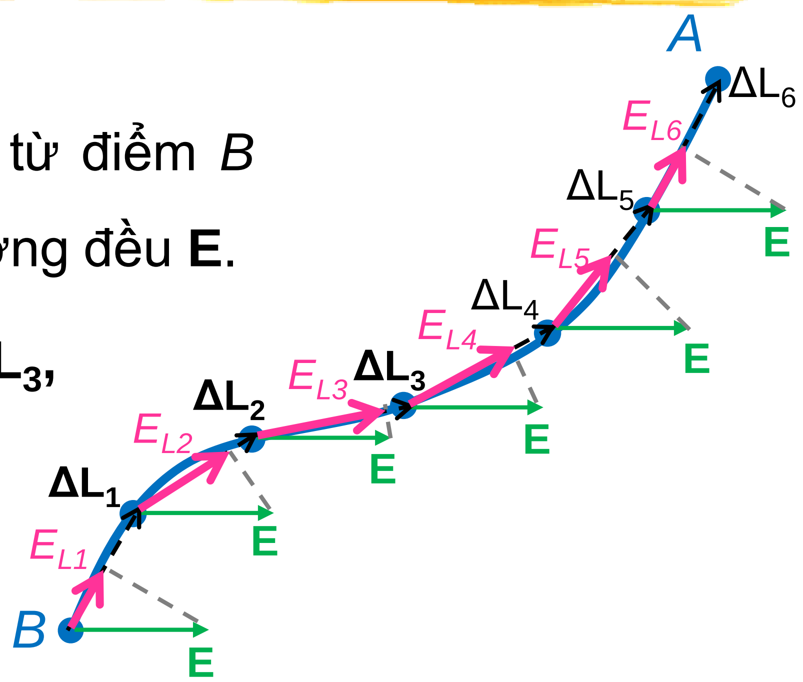
VI. Lưỡng cực

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

II. Tích phân đường

➢ Xét công dịch chuyển điện tích điểm *Q* từ điểm *B* đến điểm *A* trong không gian có điện trường đều **E**.

- ❖ Chia *B*-*A* thành 6 đoạn: $\mathbf{\Delta L_1}$, $\mathbf{\Delta L_2}$, $\mathbf{\Delta L_3}$, $\mathbf{\Delta L_4}$, $\mathbf{\Delta L_5}$, $\mathbf{\Delta L_6}$
- ❖ Ứng với mỗi đoạn có: E_{L1}, E_{L2}, E_{L3}, E_{L4}, E_{L5}, E_{L6}



- ❖ Công dịch chuyển điện tích điểm *Q* từ *B* đến *A*:

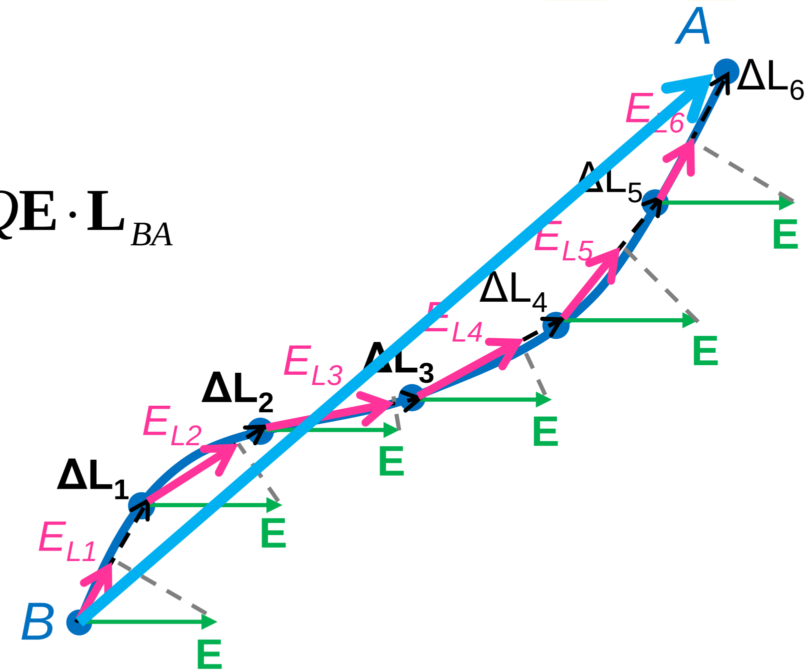
$$W = -Q(E_{L1}\Delta L_1 + E_{L2}\Delta L_2 + \ldots + E_{L6}\Delta L_6)$$

$$W = -Q(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{\Delta L}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{\Delta L}_2 + \ldots + \mathbf{E}_6 \cdot \mathbf{\Delta L}_6) = -Q\mathbf{E} \cdot (\mathbf{\Delta L}_1 + \mathbf{\Delta L}_2 + \ldots + \mathbf{\Delta L}_6)$$

$$W = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{BA}$$

II. Tích phân đường

$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \overset{do\ \mathbf{E}\ =\ const}{=} -Q\mathbf{E}\cdot\int_B^A d\mathbf{L} = -Q\mathbf{E}\cdot\mathbf{L}_{BA}$$



- **Nhận xét:** Công dịch chuyển điện tích điểm phụ thuộc:
  - *Giá trị điện tích điểm* Q
  - *Độ lớn của cường độ điện trường* **E** *(đều và không đều)*
  - *Khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối* $\mathbf{L}_{BA}$ (không phụ thuộc vào đường đi giữa 2 điểm *B*, *A*).

II. Tích phân đường

Ví dụ 4.2: Cho không gian biết $\mathbf{E} = y\mathbf{a_x} + x\mathbf{a_y} + 2\mathbf{a_z}$. Xác định công dịch chuyển điện tích điểm Q = 2C từ điểm B(1, 0, 1) đến điểm A(0,8 ; 0,6 ; 1) theo đường cong: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

Giải:

➢ Áp dụng công thức: $W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$ trong đó: $\mathbf{E} = y\mathbf{a_x} + x\mathbf{a_y} + 2\mathbf{a_z}$

$d\mathbf{L} = dx\mathbf{a_x} + dy\mathbf{a_y} + dz\mathbf{a_z}$

$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -2\int_B^A (y\mathbf{a_x} + x\mathbf{a_y} + 2\mathbf{a_z})\cdot(dx\mathbf{a_x} + dy\mathbf{a_y} + dz\mathbf{a_z})$$

$$W = -2\int_1^{0,8} y\,dx - 2\int_0^{0,6} x\,dy - 4\int_1^1 dz \quad \rightarrow W = -2\int_1^{0,8}\sqrt{1-x^2}\,dx - 2\int_0^{0,6}\sqrt{1-y^2}\,dy - 0$$

$$\rightarrow W = -\left[x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x\right]\Bigg|_1^{0,8} - \left[y\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1}y\right]\Bigg|_0^{0,6} = -0,96J$$

II. Tích phân đường

Ví dụ 4.2: Cho không gian biết **E** = y$\mathbf{a}_x$ + x$\mathbf{a}_y$ + 2$\mathbf{a}_z$. Xác định công dịch chuyển điện tích điểm *Q* = 2C từ điểm *B*(1, 0, 1) đến điểm *A*(0,8 ; 0,6 ; 1) theo đường cong: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

Giải:

$$\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

- Áp dụng công thức: $W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$ trong đó: $d\mathbf{L} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$

$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -2\int_1^{0,8} y\,dx - 2\int_0^{0,6} x\,dy - 4\int_1^1 dz$$

- Đường thẳng nối 2 điểm B – A có phương trình:

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B) \quad \rightarrow y = -3(x-1)$$

$$\rightarrow W = -6\int_1^{0,8}(x-1)dx - 2\int_0^{0,6}\left(1 - \frac{y}{3}\right)dy = -0,96J$$

II. Tích phân đường

Công thức tính vi phân đường

- Hệ tọa độ Descartes:

$$\boxed{d\mathbf{L} = dx\mathbf{a}_{\mathbf{x}} + dy\mathbf{a}_{\mathbf{y}} + dz\mathbf{a}_{\mathbf{z}}}$$

- Hệ tọa độ trụ tròn:

$$\boxed{d\mathbf{L} = d\rho\mathbf{a}_{\rho} + \rho d\varphi\mathbf{a}_{\varphi} + dz\mathbf{a}_{\mathbf{z}}}$$

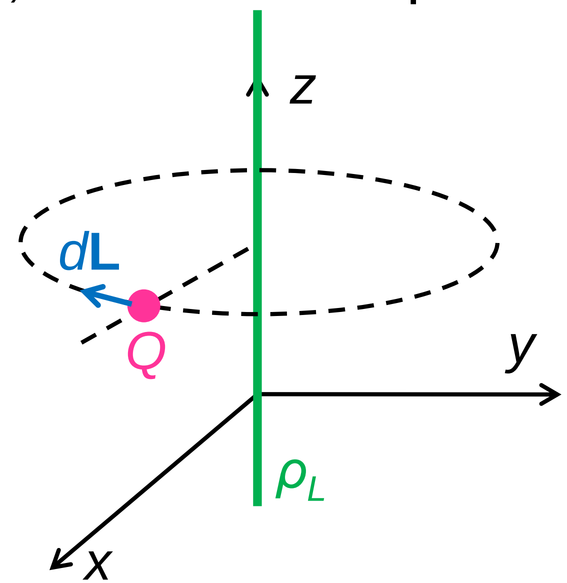
- Hệ tọa độ cầu:

$$\boxed{d\mathbf{L} = dr\mathbf{a}_{r} + rd\theta\mathbf{a}_{\theta} + r\sin\theta d\varphi\mathbf{a}_{\varphi}}$$

II. Tích phân đường

Ví dụ 4.3: Xét điện tích đường ρ_L nằm trên trục z trong chân không. Tính công di chuyển điện tích Q trên đường tròn bán kính ρ, tâm nằm trên trục z và trên mặt phẳng song song với mặt Oxy.

Giải:



➢ Áp dụng công thức tính công:

$$W = -Q\int_{\text{dau}}^{\text{cuoi}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$ trong đó:

$$d\mathbf{L} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{a}_\varphi + dz\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = E_\rho\mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho \qquad d\rho = 0$$

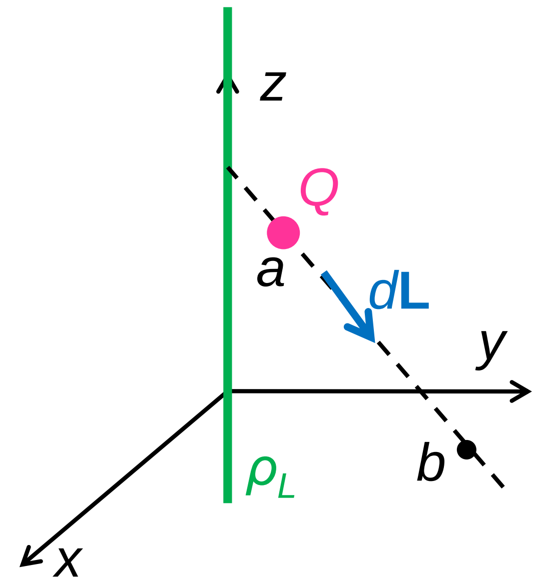
$$dz = 0$$

$$\rightarrow W = -Q\int_0^{2\pi}\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho\cdot\rho d\varphi\mathbf{a}_\varphi \quad = -Q\int_0^{2\pi}\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}d\varphi\mathbf{a}_\rho\cdot\mathbf{a}_\varphi = 0$$

II. Tích phân đường

Ví dụ 4.4: Xét điện tích đường ρ_L nằm trên trục *z* trong chân không. Tính công di chuyển điện tích *Q* từ $\rho = a$ đến $\rho = b$.

Giải:



- Áp dụng công thức tính công:

$$W = -Q\int_{dau}^{cuoi} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \quad \text{trong do}$$

$$d\mathbf{L} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{a}_\varphi + dz\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = E_\rho\mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho \qquad d\varphi = 0$$

$$dz = 0$$

$$\rightarrow W = -Q\int_a^b \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho\cdot d\rho\mathbf{a}_\rho = -Q\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Chương 4: Năng lượng - Điện thế

III. Hiệu điện thế - Điện thế

- ***Định nghĩa:*** Hiệu điện thế giữa 2 điểm *A* và *B* (V_{AB}) là công dịch chuyển một điện tích thử 1C trong điện trường **E** từ điểm *B* đến điểm *A*.

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \qquad \left[\frac{J}{C} = V \right]$$

- Nếu coi 1 điểm trong hệ thống có điện thế bằng 0 (*điểm tham chiếu*, *điểm "đất"* của hệ thống) thì hiệu điện thế của điểm khác so với điểm tham chiếu chính là *điện thế* (*điện thế tuyệt đối*) của chúng.

- Nếu biết thế V_A, V_B của 2 điểm A, B (chung *điểm tham chiếu*) thì hiệu điện thế giữa A và B (V_{AB}) được tính theo công thức:

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

III. Hiệu điện thế - Điện thế

Ví dụ 4.5: Tính hiệu điện thế giữa 2 điểm *A*, *B* cùng nằm trên 1 trục xuyên tâm có khoảng cách r_A, r_B đặt trong điện trường của một điện tích điểm *Q*.

- Chọn hệ tọa độ cầu có tâm trùng vị trí của điện tích điểm *Q*
- Vector cường độ điện trường do *Q* tạo ra: $\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$
- Hiệu điện thế V_{AB} là:

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

III. Hiệu điện thế - Điện thế

Ví dụ 4.6: Trong không gian có $\mathbf{E} = 6x^2\mathbf{a_x} + 6y\mathbf{a_y} + 4\mathbf{a_z}$ *V/m.*

a. Tính V_{MN} nếu $M(2, 6, -1)$, $N(-3, -3, 2)$

$$V_{MN} = -\int_N^M \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_N^M (6x^2\mathbf{a_x} + 6y\mathbf{a_y} + 4\mathbf{a_z})\cdot(dx\mathbf{a_x} + dy\mathbf{a_y} + dz\mathbf{a_z})$$

$$V_{MN} = -6\int_{-3}^{2} x^2dx - 6\int_{-3}^{6} ydy - 4\int_{2}^{-1} dz = -139V$$

b. Tính V_N nếu điểm $P(1, 2, -4)$ có $V_P = 2$

$$V_N = V_{NP} + V_P = 2 - \int_P^N \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = 2 - 6\int_{1}^{-3} x^2dx - 6\int_{2}^{-3} ydy - 4\int_{-4}^{2} dz = 19V$$

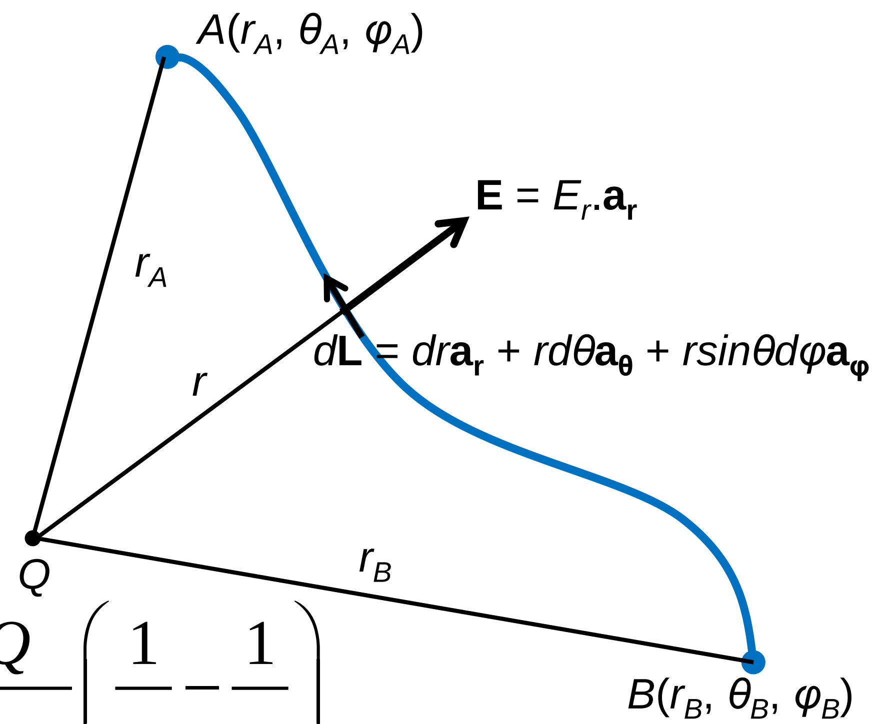
Chương 4: Năng lượng - Điện thế

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

1. Trường thế của điện tích điểm

- Ví dụ *4.5* đã chứng minh hiệu điện thế giữa 2 điểm *A*, *B* nằm trên trục xuyên tâm có khoảng cách r_A, r_B đặt trong điện trường của điện tích điểm *Q* được tính theo công thức:

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

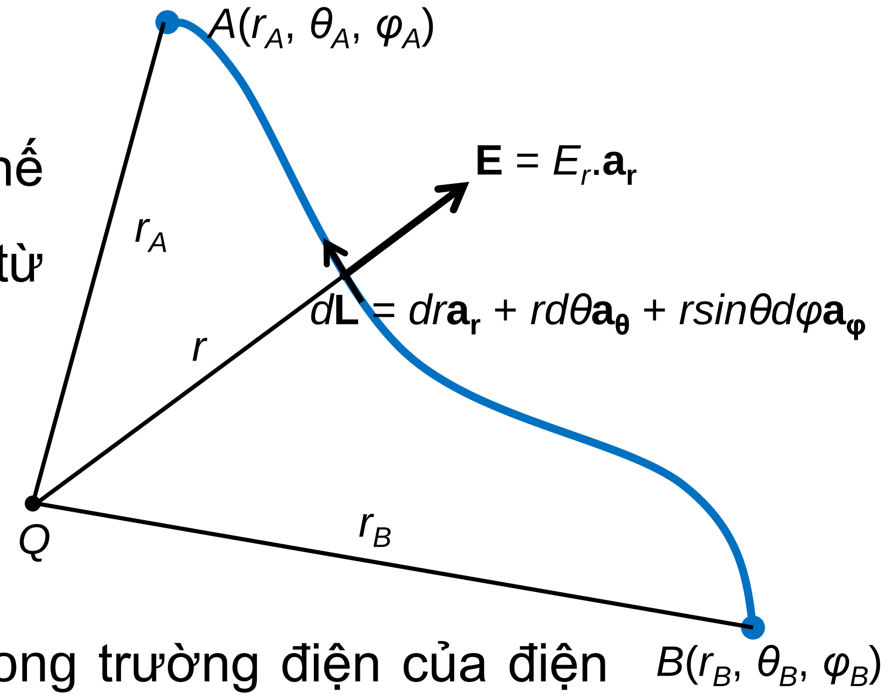


- Với 2 điểm A, B bất kỳ, hiệu điện thế để di chuyển điện tích điểm Q từ B đến A là:

$$V_{AB} = -\int_{r_B}^{r_A} E_r dr = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

1. Trường thế của điện tích điểm



➢ Với 2 điểm A, B bất kỳ, hiệu điện thế để di chuyển một điện tích điểm Q từ B đến A là:

$$V_{AB} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

➢ Hiệu điện thế giữa 2 điểm bất kỳ trong trường điện của điện tích điểm chỉ phụ thuộc khoảng cách giữa 2 điểm đến điện tích điểm, không phụ thuộc vào quãng đường nối giữa 2 điểm.

➢ Coi $r_B = \infty$ và $V_B = 0$: $$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$ (Trường thế của điện tích điểm)

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

1. Trường thế của điện tích điểm

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

- Trường thế của điện tích điểm cho ta biết công để di chuyển điện tích thử *1C* từ xa vô cùng (điểm tham chiếu, *V* = 0) về điểm bất kỳ cách điện tích điểm một khoảng *r.*
- Trường thế của điện tích điểm: trường vô hướng, không có vector đơn vị.
- Gọi ***mặt đẳng thế*** là tập hợp tất cả các điểm có cùng điện thế → công dịch chuyển điện tích trên mặt đẳng thế bằng không.
- ***Mặt đẳng thế của điện tích điểm*** là các mặt cầu đồng tâm, có tâm trùng với vị trí của điện tích điểm đó.

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

1. Trường thế của điện tích điểm

Ví dụ 4.7: Cho *Q = 15nC* ở gốc tọa độ. Tính V_P nếu *P*(-2, 3, -1) và:

a. V = 0 tại điểm *A*(6, 5, 4)

$$V_{PA} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{15.10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{4+9+1}} - \frac{1}{\sqrt{36+25+16}}\right) = 20,68V$$

b. V = 0 tại vô cùng

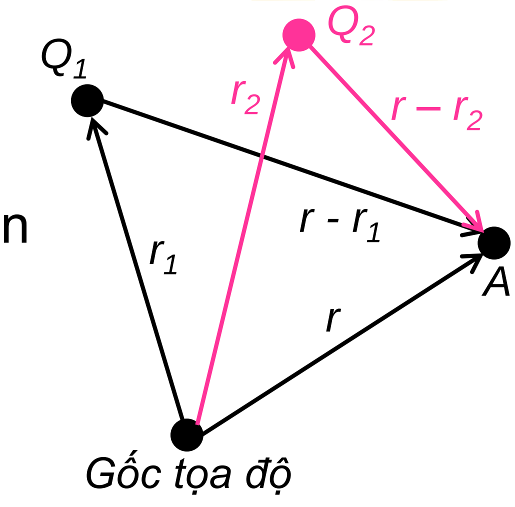
$$V_{PA} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_P} = \frac{15.10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{4+9+1}} = 36,1V$$

c. V = 5 tại *B*(2, 0, 4)

$$V_P = V_{PB} + V_B = 5 + \frac{15.10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{4+9+1}} - \frac{1}{\sqrt{4+0+16}}\right) = 10,89V$$

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

2. Trường thế của hệ điện tích điểm



➢ Xét không gian, gồm điện tích điểm Q_1. Khi đó điện thế tại điểm A bất kỳ sẽ được tính theo công thức:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r_1}|}$$

➢ Nếu không gian có n điện tích điểm Q_1, Q_2, …, Q_n, điện thế tại A là:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r_k}|}$$

➢ Coi Q_k là một phần tử của phân bố điện tích khối liên tục $\rho_V \Delta v_m$:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_v(\mathbf{r_k})\Delta v_k}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r_k}|} \xrightarrow{n\to\infty} V(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

2. Trường thế của hệ điện tích điểm

➢ Vậy trường thế của một vật mang điện:

❖ Có mật độ điện tích khối ρ_V:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

❖ Có mật độ tích đường ρ_L (dây dẫn thẳng mang điện, dài vô hạn):

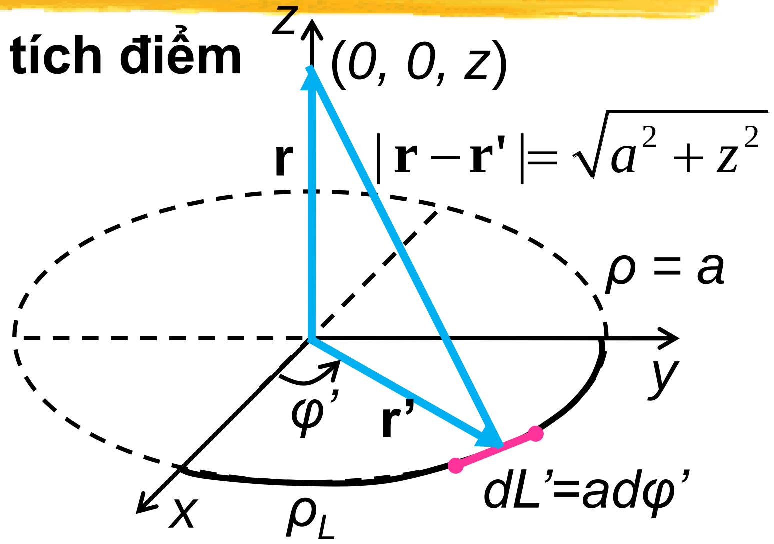
$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')dL'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

❖ Có mật độ điện tích mặt ρ_S (mặt tích điện, rộng vô hạn)

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')dS'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

2. Trường thế của hệ điện tích điểm



Ví dụ 4.8: Tính thế điểm trên trục z trong trường của dây tròn ρ_L, bán kính *a*, thuộc mặt phẳng z=0

- Ta có công thức: $V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')dL'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$

trong đó: $dL' = ad\varphi'$; $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$; $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$

$$\rightarrow |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{a^2+z^2} \qquad \rightarrow V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

- ***Nhận xét:***
  - Điện thế tại 1 điểm là công sinh ra để đưa 1 điện tích thử từ vô cùng về điểm đó mà không phụ thuộc vào đường đi giữa chúng.
  - Trường thế của một hệ nhiều điện tích điểm là tổng của các trường thế do từng điện tích điểm tạo nên.

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

2. Trường thế của hệ điện tích điểm

- Mặt khác, điện thế của điểm *A* bất kỳ được tính theo công thức:

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

- Hiệu điện thế giữa *A và B* không phụ thuộc vào đường nối giữa *A* và *B*

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

- Đối với điện trường tĩnh (vector cường độ điện trường không thay đổi phương, hướng và độ lớn theo thời gian t):

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0}$$

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

2. Trường thế của hệ điện tích điểm

Ví dụ 4.9: Trong chân không, coi điểm vô cùng có thế bằng 0, tính điện thế điểm *A*(0, 0, 2) gây ra bởi vật mang điện:

a. Điện tích đường ρ_L = 12nC/m, tại ρ = 2,5m, z = 0

$$V_A = \frac{\rho_L a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{12.10^{-9}.2,5}{2\varepsilon_0\sqrt{2,5^2+2^2}} = 529,4V$$

b. Điện tích điểm Q = 18nC tại B(1, 2, -1)

$$V_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_B|} = \frac{18.10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1+4+9}} = 43,26V$$

Chương 4: Năng lượng - Điện thế

V. Gradient thế

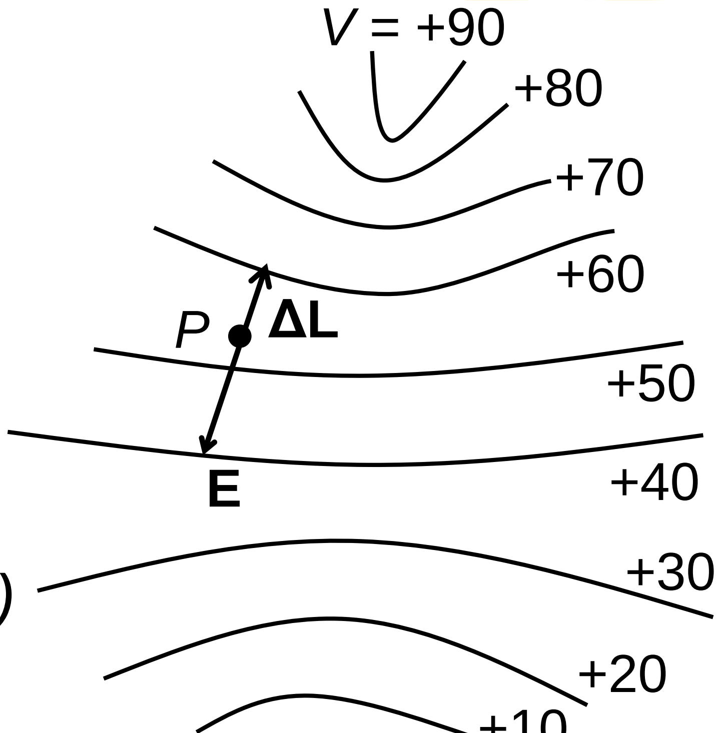
- Có 2 cách xác định điện thế tại một điểm gây ra bởi một vật mang điện:
  - Thông qua vector cường độ điện trường **E** ***(tích phân đường)***
  - Thông qua hàm phân bố mật độ điện tích ***(tích phân khối)***

- Tuy nhiên thực tế, giá trị của vector cường độ điện trường và hàm phân bố mật độ điện tích đều chưa biết.

- Trong nhiều trường hợp, ta đã biết điện thế của hai mặt đẳng thế. Khi đó cần xác định cường độ điện trường **E** hoặc phân bố mật độ điện tích của các mặt đẳng thế.

→ **Phương pháp gradient thế**

V. Gradient thế



- Xuất phát từ công thức: $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$
- Xét đoạn nhỏ **ΔL** rất nhỏ sao cho **E** = const:

$$\rightarrow \Delta V \simeq -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{L} = -E \Delta L \cos\theta$$

- Xét vi phân quãng đường *L*:

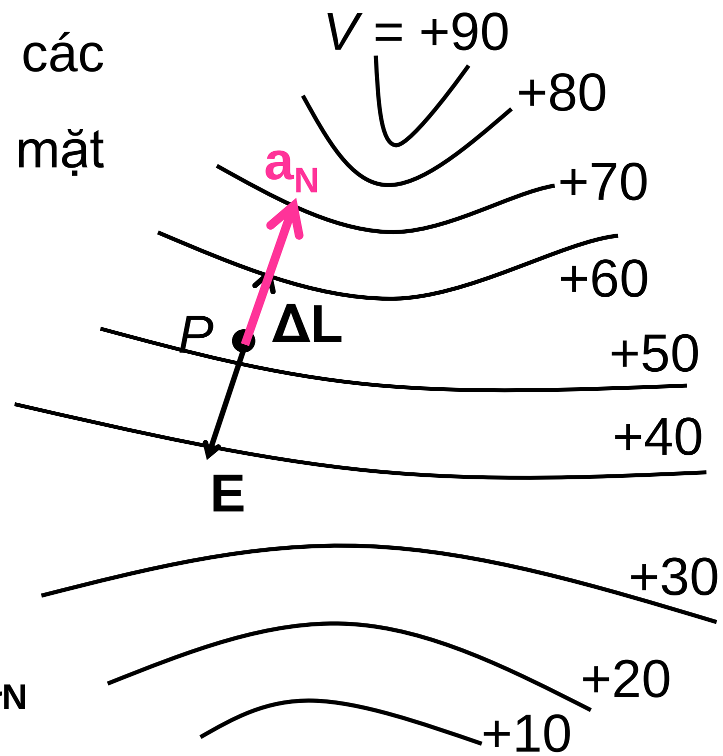
$$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta \rightarrow E = \left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} \quad (\cos\theta = -1)$$

- Độ lớn của **E** bằng giá trị cực đại tốc độ biến thiên của điện thế theo khoảng cách.
- Giá trị cực đại đạt được nếu hướng của vi phân khoảng cách ngược hướng với **E** (hướng của **E** ngược với hướng tăng nhanh nhất điện thế).

V. Gradient thế

➢ Gọi $\mathbf{a}_N$ là vector pháp tuyến đơn vị của các mặt đẳng thế, và có hướng về phía các mặt đẳng thế có điện thế cao. Khi đó

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} \mathbf{a}_N}$$



➢ Do *dV/dL* → max khi d**L** cùng hướng với $\mathbf{a}_N$

$$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} = \frac{dV}{dN} \quad \rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\frac{dV}{dN}\mathbf{a}_N}$$

V. Gradient thế

- Định nghĩa toán tử *gradient* (grad) của một trường vector *T* bất kỳ:

$$\text{Gradient of } T = \text{grad } T = \frac{dT}{dN}\mathbf{a}_\mathrm{N}$$

$\mathbf{a}_\mathrm{N}$ là vector pháp tuyến đơn vị của các mặt đẳng thế, có hướng theo hướng tăng của trường vector *T*

- Vậy ta có: $\boxed{\mathbf{E} = -grad\ V}$

- Mặt khác ta có: *V = V(x, y, z)*

$$\rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

- Suy ra:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_\mathrm{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_\mathrm{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_\mathrm{z}\right)}$$

$$\boxed{grad\ V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_\mathrm{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_\mathrm{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_\mathrm{z}}$$

V. Gradient thế

$$\boxed{grad\ V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

- Mặt khác ta có

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z \quad \rightarrow \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

- Vậy ta có: $\nabla T = grad\ T$

- Mặt khác: $\mathbf{E} = -grad\ V$

- Suy ra quan hệ giữa vector cường độ điện trường và trường thế:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$$

V. Gradient thế

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

- **Hệ tọa độ Descartes**:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a_z}$$

- **Hệ tọa độ trụ tròn:**

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{a_\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a_z}$$

- **Hệ tọa độ cầu:**

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{a_\varphi}$$

V. Gradient thế

- Chú ý phân biệt 2 toán tử

❖ ***Gradient:***

$$grad V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a_z}$$

Gradient của một đại lượng vô hướng là một vector

❖ ***Dive:***

$$div\mathbf{D} = \nabla.\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Dive của một đại lượng vector cho ta một giá trị vô hướng.

V. Gradient thế

Ví dụ 4.10: Xét một trường thế $V = 2x^2y - 5z$ và điểm $P(-4, 3, 6)$. Hãy tính điện thế, cường độ điện trường **E**, hàm mật độ dịch chuyển điện **D**, và hàm mật độ phân bố điện tích ρ_V tại *P.*

Giải:

- Điện thế tại *P:* $V_P = 2(-4)^2.3 - 5.6 = 66$V
- Vector cường độ điện trường **E** tại *P*:

$$\mathbf{E}_P = -\nabla V\Big|_{P(-4,3,6)} = -4xy\mathbf{a_x} - 2x^2\mathbf{a_y} + 5\mathbf{a_z}\Big|_{P(-4,3,6)} = 48\mathbf{a_x} - 32\mathbf{a_y} + 5\mathbf{a_z} V/m$$

- Hàm mật độ dịch chuyển: $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = -35,4xy\mathbf{a_x} - 17,71x^2\mathbf{a_y} + 44,27\mathbf{a_z}\ pC/m^3$

$$\mathbf{D}\Big|_{P(-4,3,6)} = \varepsilon_0\mathbf{E}\Big|_{P(-4,3,6)} = 425\mathbf{a_x} - 283,3\mathbf{a_y} + 4,43\mathbf{a_z}\ pC/m^3$$

- Hàm mật độ phân bố điện tích khối ρ_V:

$$\rho_V = \left(\nabla\cdot\mathbf{D}\right)\Big|_{P(-4,3,6)} = \left(-35,4y\right)\Big|_{P(-4,3,6)} = -106,2\ pC/m^3$$

Chương 4: Năng lượng - Điện thế

I. Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

II. Tích phân đường

III. Hiệu điện thế - Điện thế

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

V. Gradient thế

VI. Lưỡng cực

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

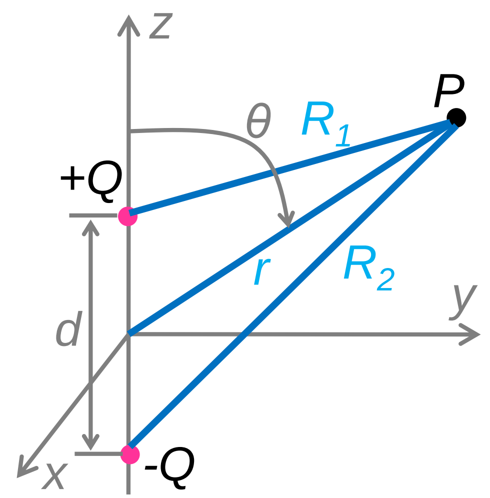
VI. Lưỡng cực

- Việc nghiên cứu hiện tượng lưỡng cực cho phép phân tích quá trình điện từ trong các chất điện môi đặt trong điện trường **E**.
- ***Lưỡng cực điện*** (*lưỡng cực*) là khái niệm để chỉ 2 điện tích điểm trái dấu, cùng độ lớn, đặt cạnh nhau sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn nhiều khoảng cách đến điểm cần xét ($\mathbf{E_P}$ hay V_P)
  - ❖ Điện thế của điểm $P(r, \theta, \varphi=-90^0)$:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

  - ❖ Xét quỹ tích các điểm có $z = 0 \rightarrow R_1 = R_2 \rightarrow V = 0$ *(điểm "đất")*
  - ❖ Nếu P càng xa vị trí lưỡng cực điện:

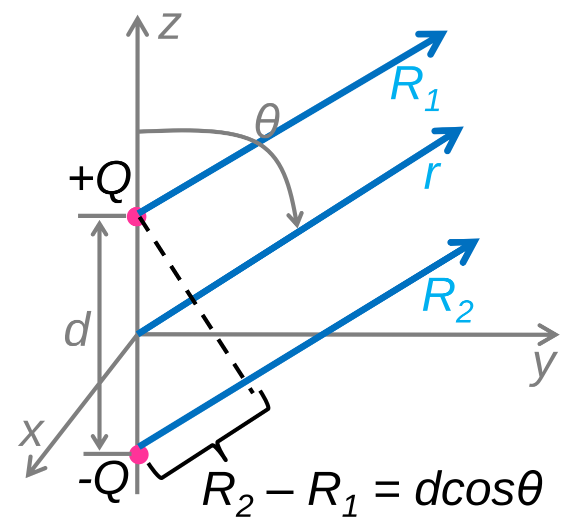
$$R_1 \simeq R_2 \quad \rightarrow V_P = 0$$



VI. Lưỡng cực

- Ở khoảng cách đủ gần, coi R_1 // R_2

$$\rightarrow R_2 - R_1 \simeq d\cos\theta$$



- Vậy thế tại P được tính theo công thức:

$$\boxed{V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

(điểm tham chiếu: mặt phẳng z = 0)

- Áp dụng công thức tính **E** trong hệ tọa độ cầu:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{a}_\varphi\right) = -\left(-\frac{2Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{a}_r - \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{a}_\theta\right)$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\mathbf{a}_r - \sin\theta\mathbf{a}_\theta\right)}$$

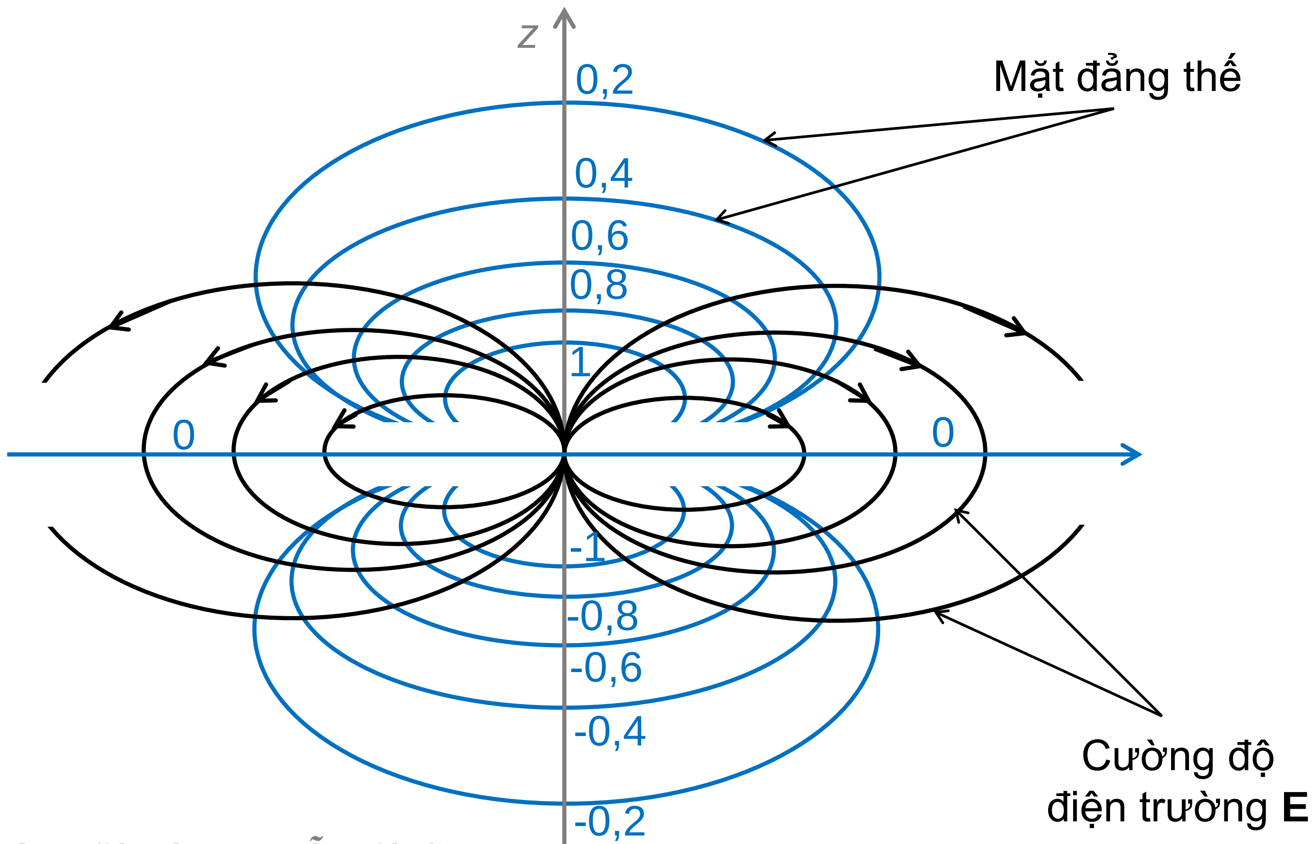
VI. Lưỡng cực

$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\mathbf{a_r} - \sin\theta\,\mathbf{a_\theta}\right)$$

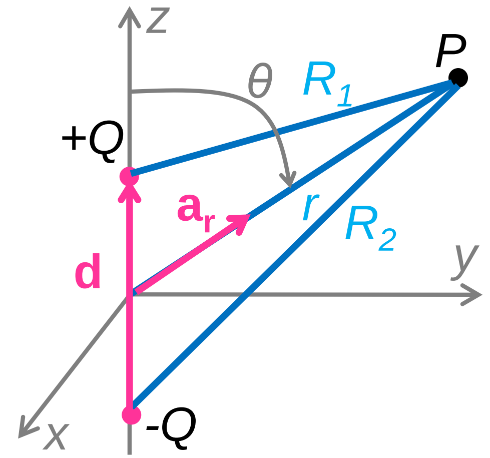
Chọn $\longrightarrow$ $\frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0} = 1$

$\cos\theta = Vr^2$



VI. Lưỡng cực

➢ Momen lưỡng cực điện: **p** = *Q***d** [C.m]



$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \xrightarrow{\mathbf{d}.\mathbf{a}_r = d\cos\theta} V = \frac{\mathbf{p}.\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\rightarrow \boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\mathbf{p}.\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

r: vector định vị *P*

r': vector định vị tâm lưỡng cực điện

➢ **Nhận xét:**

❖ Điện thế *V* tại một điểm do lưỡng cực điện gây ra tỷ nghịch với bình phương khoảng cách.

❖ Cường độ điện trường **E** tại một điểm do lưỡng cực điện gây ra tỷ nghịch với khoảng cách mũ ba.

VI. Lưỡng cực

Ví dụ 4.11: Một lưỡng cực điện đặt trong chân không, tại gốc tọa độ có momen lưỡng cực $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ nC.m.

a. Tính V tại $A(2, 3, 4)$

$$\mathbf{a}_r = \frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} \qquad r = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

➢ Áp dụng công thức:

$$V = \frac{\mathbf{p}.\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z).(2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{29}\right)^3} = 0,23$$

b. Tính V tại $B(r = 2,5\ ;\ \theta = 30^0\ ;\ \varphi = 40^0)$ → $B(0,96\ ;\ 0,8\ ;\ 2,17)$

$$\mathbf{a}_r = \frac{0,96\mathbf{a}_x + 0,8\mathbf{a}_y + 2,17\mathbf{a}_z}{\sqrt{0,96^2 + 0,8^2 + 2,17^2}} \qquad r = \sqrt{0,96^2 + 0,8^2 + 2,17^2} = 2,5$$

$$V = \frac{\mathbf{p}.\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z).(0,96\mathbf{a}_x + 0,8\mathbf{a}_y + 2,17\mathbf{a}_z)}{4\pi\varepsilon_0(2,5)^3} = 1,985V$$

VI. Lưỡng cực

Ví dụ 4.12: Một lưỡng cực điện đặt trong chân không, tại gốc tọa độ có momen lưỡng cực **p** = 6$\mathbf{a}_z$ nC.m. Tính **E** tại $A(r = 4\ ;\ \theta = 20^0\ ;\ \varphi = 0)$

$$D/S:\mathbf{E}=1,584\mathbf{a_r}+0,288\mathbf{a_\theta}\ V/m$$

Chương 4: Năng lượng - Điện thế

I. Dịch chuyển điện tích điểm trong điện trường

II. Tích phân đường

III. Hiệu điện thế - Điện thế

IV. Trường thế của điện tích điểm, hệ điện tích điểm

V. Gradient thế

VI. Lưỡng cực

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

- Nếu di chuyển Q_2 từ xa vô cùng vào không gian có điện trường tạo bởi Q_1 cố định, ta cần thực hiện một công.
  - Nếu Q_2 được giữ nguyên: Q_2 có thế năng
  - Nếu Q_2 được đặt tự do:
    - Q_2 dịch chuyển ra xa Q_1
    - Q_2 tích lũy động năng khi chuyển động (thế năng giảm).
- Cần xác định thế năng của một hệ điện tích điểm.

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

- Xét điện tích điểm Q_2 đặt trong không gian có điện trường của Q_1
- Gọi $V_{2,1}$ là điện thế tại vị trí của Q_2 do Q_1 tạo ra

Công di chuyển $Q_2 = Q_2V_{2,1}$

- Không gian có điện tích điểm Q_3

Công di chuyển $Q_3 = Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2}$

- Không gian có điện tích điểm Q_4

Công di chuyển $Q_4 = Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3}$

- Tổng công di chuyển = Thế năng của điện trường

$$W_E = Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} + Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3} + \ldots$$

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

$$W_E = Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} + Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3} + \ldots$$

- Mặt khác: $\left.\begin{array}{l} Q_3V_{3,1} = Q_3\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} \\ R_{13} = R_{31} \end{array}\right\} \rightarrow Q_3V_{3,1} = Q_1\dfrac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{31}} = Q_1V_{1,3}$

$\rightarrow$ $W_E = Q_1V_{1,2} + Q_1V_{1,3} + Q_1V_{1,4} + Q_2V_{2,3} + Q_2V_{2,4} + Q_3V_{3,4} + \ldots$

$\rightarrow$ $2W_E = Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \ldots) +$ $\qquad V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \ldots = V_1$

$Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \ldots) +$ $\qquad V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \ldots = V_2$

$Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \ldots) +$ $\qquad V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \ldots = V_3$

- Vậy ta có: $W_E = \dfrac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + \ldots) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_kV_k$ $\rightarrow \boxed{W_E = \dfrac{1}{2}\int_V \rho_V V dv}$
- Để tính năng lượng vật mang điện, coi: $Q_k = \rho_V dv$

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_V \rho_V V dv$$

- Công thức cho phép tính thế năng của một hệ điện tích điểm, hoặc một vật mang điện có hàm mật độ phân bố điện tích khối ρ_V
- Công thức tính thế năng của vật mang điện có hàm mật độ phân bố điện tích khối ρ_V có thể coi là công thức tính thế năng tổng quát cho các vật mang điện khác nhau:
  - Điện tích điểm
  - Điện tích đường
  - Điện tích mặt

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

- Xét công thức: $W_E = \frac{1}{2}\int_V \rho_V V dv$
- Áp dụng phương trình Maxwell 1: $\rho_V = \nabla \cdot \mathbf{D}$

$\rightarrow W_E = \frac{1}{2}\int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv$

- Mặt khác: $\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$

$$\rightarrow W_E = \frac{1}{2}\int_V \left[\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)\right] dv$$

$$\leftrightarrow W_E = \frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot (V\mathbf{D}) dv - \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$$

- Áp dụng định lý Dive: $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv$
- Vậy ta có công thức: $W_E = \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D})\cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot(\nabla V)dv$$

- Ta có:

$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$:suy giảm với tốc độ $\dfrac{1}{r}$

$\mathbf{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a_r}$:suy giảm với tốc độ $\dfrac{1}{r^2}$

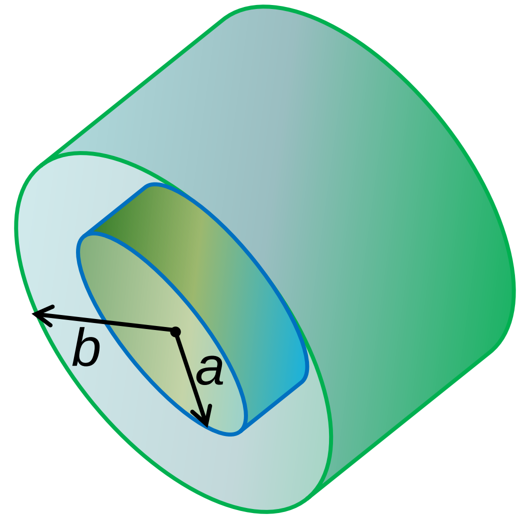
$d\mathbf{S}$: suy giảm với tốc độ r^2

$$\rightarrow \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D})\cdot d\mathbf{S} = 0$$

- Vậy ta có: $W_E = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \mathbf{D}\cdot(\nabla V)dv$
- Theo công thức gradient thế: $\mathbf{E} = -\nabla V$

$$\rightarrow \boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dv = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 dv}$$

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện



Ví dụ 4.13: Tính thế năng của cáp đồng trục (tụ) độ dài L, có mật độ phân bố điện mặt trong của cáp ρ_S

Cách 1:

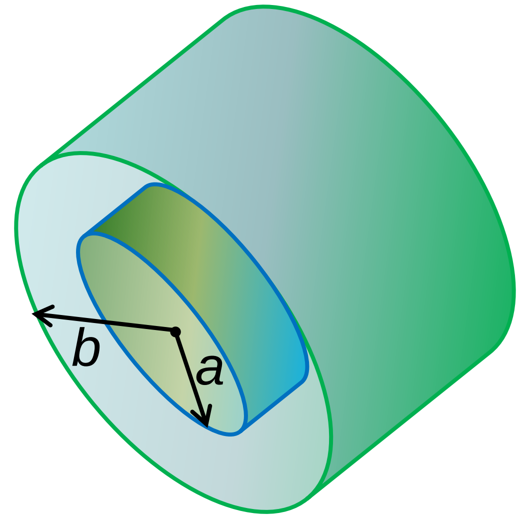
- Áp dụng công thức: $W_E = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 dv$

trong đó: $D_\rho = \frac{a\rho_S}{\rho}(a < \rho < b) \quad \rightarrow \mathbf{E} = \frac{a\rho_S}{\varepsilon_0 \rho}\mathbf{a}_\rho$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \varepsilon_0 \frac{a^2\rho_S^2}{\varepsilon_0^2\rho^2}\rho d\rho d\varphi dz = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

Ví dụ 4.13: Tính thế năng của cáp đồng trục (tụ) độ dài L, có mật độ phân bố điện mặt trong của cáp ρ_S



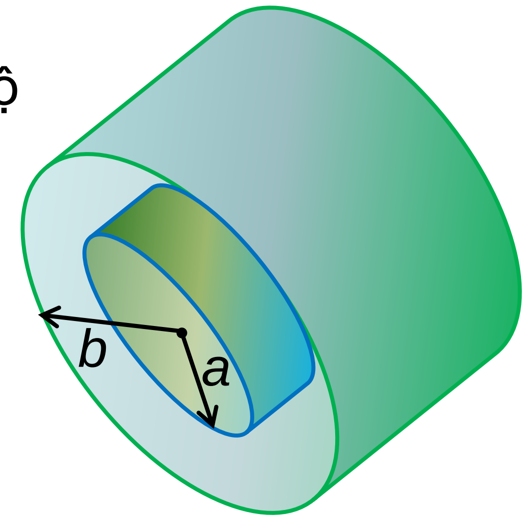
Cách 2:

- Áp dụng công thức: $W_E = \frac{1}{2}\int_V \rho_V V dv$
- Coi các điểm trên mặt ngoài của cáp là *điểm tham chiếu* (V = 0). Thế của các điểm trên mặt trong của cáp là:

$$\left.\begin{array}{l} V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \\ V_b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow V_a = -\int_b^a E_\rho d\rho = -\int_b^a \frac{a\rho_S}{\varepsilon_0 \rho} d\rho = \frac{a\rho_S}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

Ví dụ 4.13: Tính thế năng của cáp đồng trục (tụ) độ dài L, có mật độ phân bố điện mặt trong của cáp ρ_S



Cách 2: $W_E = \frac{1}{2}\int_V \rho_V \frac{a\rho_S}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}dv$

$$\rho_V = \frac{\rho_S}{t}, a - \frac{t}{2} \le \rho \le a + \frac{t}{2}, t << a$$

$$\rightarrow W_E = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{z=L}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\rho=a-\frac{t}{2}}^{\rho=a+\frac{t}{2}} \frac{\rho_S}{t} a \frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}\rho d\rho d\varphi dz = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

- Chú ý:
  - Tổng điện tích lõi cáp: $Q = 2\pi a L \rho_S$
  - Điện thế lõi cáp: $V_a = \frac{a\rho_S}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

$$\left.\begin{array}{l} Q = 2\pi a L \rho_S \\ V_a = \frac{a\rho_S}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \end{array}\right\} \rightarrow W_E = \frac{1}{2}QV_a = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Năng lượng của tụ

VII. Mật độ năng lượng trong trường tĩnh điện

Ví dụ 4.14: Tính năng lượng W_E của một vật mang điện 2mm < r < 3mm, 0 < θ < 90^0, 0 < φ < 90^0 trong chân không, biết trường thế V:

a. $\dfrac{200}{r}V$

b. $\dfrac{300cos\theta}{r^2}V$

Chương 5: Vật dẫn - Điện môi - Điện dung

I. Dòng điện - Mật độ dòng điện

II. Vật dẫn kim loại

III. Phương pháp soi ảnh

IV. Bán dẫn

V. Chất điện môi

VI. Điện dung

VII. Phương pháp đường sức - đẳng thế

VIII. Phương pháp lưới

I. Dòng điện - Mật độ dòng điện

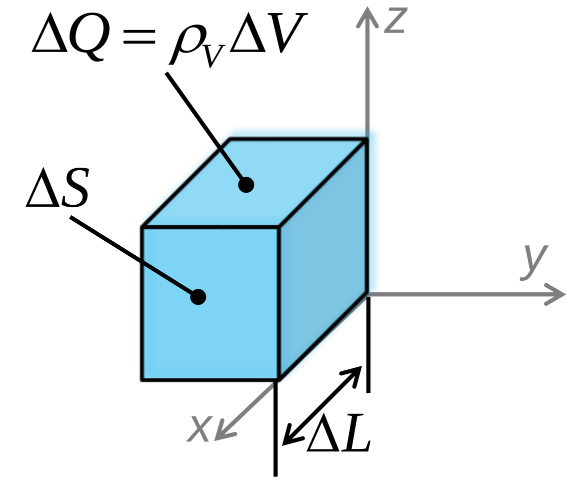
- ***Dòng điện*** là dòng chuyển dời có hướng của các hạt mang điện dương (tốc độ biến thiên của điện tích theo thời gian).

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A]$$

- ***Mật độ dòng điện J [A/m²]*** đo sự phân bố dòng điện trên một đơn vị diện tích.
- Dòng điện chảy ra khỏi mặt ΔS vuông góc với mật độ dòng điện, được tính theo công thức: $\Delta I = J_N \Delta S$
- Nếu ΔS không vuông góc với mật độ dòng điện: $\Delta I = \mathbf{J}.\mathbf{\Delta S}$
- Tổng dòng điện qua mặt S có mật độ dòng điện **J** được tính theo công thức:

$$\boxed{I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}$$

I. Dòng điện - Mật độ dòng điện

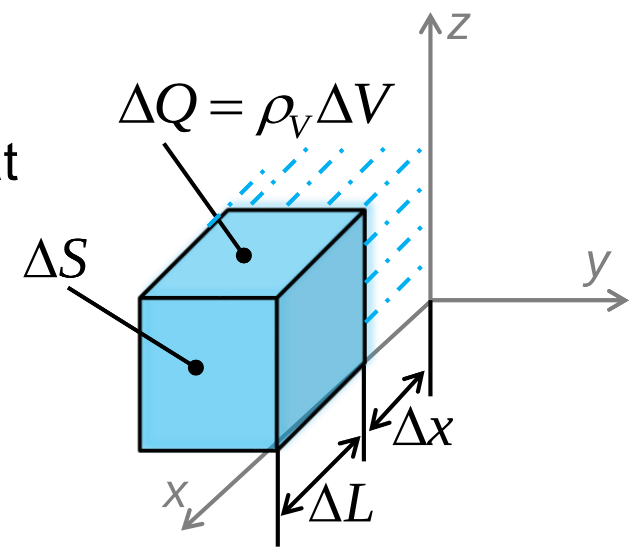


- Vật mang điện có hàm mật độ điện tích khối ρ_V

$$\Delta Q = \rho_V \Delta V = \rho_V \Delta S \Delta L$$

- Đơn giản hóa: Coi vật dịch chuyển song song với trục *x: Δx* trong khoảng thời gian *Δt*

$$\Delta Q = \rho_V \Delta S \Delta x$$



- Vậy trong Δ*t*, lượng dòng điện Δ*I* chảy qua mặt vuông góc với phương Δ*x* là:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_V \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta I = \rho_V \Delta S v_x = J_x \Delta S$$

- Vậy ta có: $\boxed{\mathbf{J} = \rho_V \mathbf{v}}$

I. Dòng điện - Mật độ dòng điện

Ví dụ: Cho vector mật độ dòng điện $\mathbf{J} = 10\rho^2 z\mathbf{a}_\rho - 4\rho\cos^2\varphi\mathbf{a}_\varphi \ \ A/m^2$

Tính tổng dòng điện chảy qua mặt tròn *ρ = 3, 0 < φ < 2π, 1 < z < 2*

Giải:

- Áp dụng công thức: $I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J}\big|_{\rho=3}\cdot d\mathbf{S}$
- Ta có:

$$\mathbf{J}\big|_{\rho=3} = 10.3^2 z\mathbf{a}_\rho - 4.3\cos^2\varphi\mathbf{a}_\varphi = 90z\mathbf{a}_\rho - 12\cos^2\varphi\mathbf{a}_\varphi$$

$$d\mathbf{S} = \rho d\varphi dz\mathbf{a}_\rho = 3d\varphi dz\mathbf{a}_\rho$$

- Suy ra:

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_S 270zd\varphi dz = \int_{z=1}^{z=2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 270zd\varphi dz = \int_{z=1}^{z=2} 2\pi.270zdz = 2,54A$$

I. Dòng điện - Mật độ dòng điện

- Xét một mặt kín S: $I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$
- Theo định nghĩa: Dòng điện chảy ra khỏi mặt kín tỷ lệ với độ giảm của hạt mang điện tích dương (tỉ lệ với độ tăng của hạt mang điện tích âm).
- Gọi Q_i là các hạt mang điện trong một mặt kín.

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \qquad \text{trong đó } Q_i = \int_V \rho_V dv$$

- Định lý Dive: $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv \rightarrow \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_V dv = \int_V -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} dv$

$$\rightarrow (\nabla \cdot \mathbf{J}) \Delta v = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \Delta v \qquad \rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}}$$

I. Dòng điện - Mật độ dòng điện

Ví dụ: Khảo sát mật độ dòng điện: $\mathbf{J} = \dfrac{e^{-t}}{r}\mathbf{a_r}$ *A/m*^{2}

- Tại t = 1s, tổng dòng điện chảy ra khỏi mặt cầu kín bán kính
  - Bán kính r = 5m: $I = J_r S = \dfrac{1}{5}e^{-1}4\pi 5^2 = 23{,}1$ *A*
  - Bán kính r = 6m: $I = J_r S = \dfrac{1}{6}e^{-1}4\pi 6^2 = 27{,}7$ *A*
- Mật độ điện tích khối: $-\dfrac{\partial \rho_V}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left(\dfrac{1}{r}e^{-t}\mathbf{a_r} \right) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{1}{r}e^{-t} \right) = \dfrac{1}{r^2}e^{-t}$

$$\rho_V = -\int \frac{1}{r^2}e^{-t}dt + K(r) = \frac{1}{r^2}e^{-t} + K(r) \xrightarrow[\rho_V \to 0]{khi\ r\to\infty} \rho_V = \frac{1}{r^2}e^{-t} \quad C/m^3$$

- Vận tốc dịch chuyển của điện tích: $\mathbf{J} = \rho_V \mathbf{v} \rightarrow v_r = \dfrac{J_r}{\rho_V} = \dfrac{\frac{1}{r}e^{-t}}{\frac{1}{r^2}e^{-t}} = r$ *m/s*

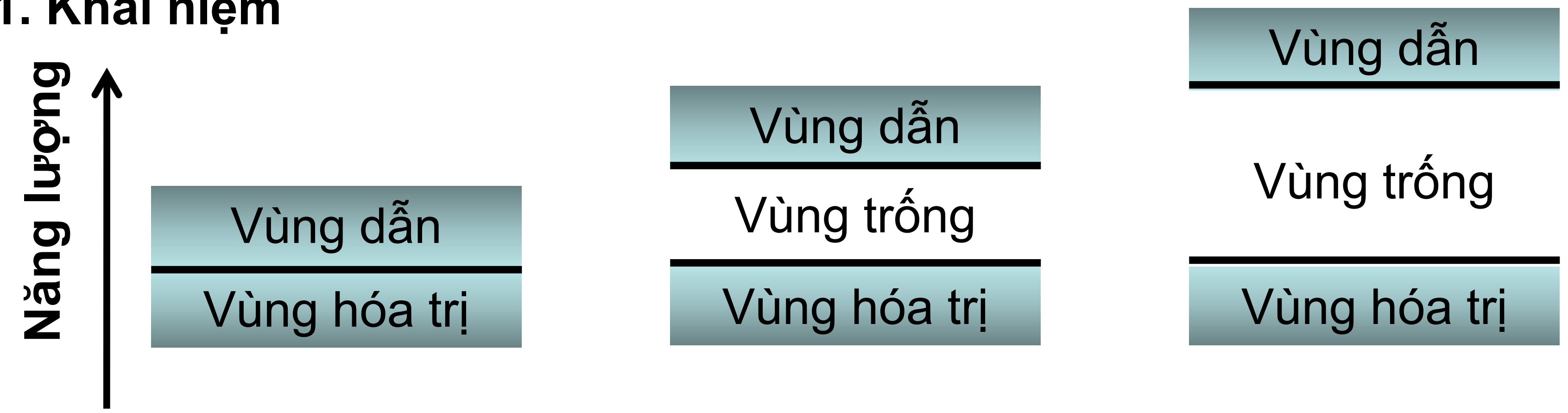
II. Vật dẫn kim loại

1. Khái niệm

- Cấu tạo của một nguyên tử: **Năng lượng = Động năng + thế năng**
  - Hạt nhân mang điện tích dương.
  - Các electron mang điện tích âm chuyển động xung quanh.
  - Electron ở mức năng lượng thấp có quỹ đạo chuyển động gần hạt nhân (và ngược lại).
  - Khi electron chuyển từ mức năng lượng này sang mức năng lượng khác thì nó sẽ nhận (hoặc phát) ra năng lượng.
  - Các electron hóa trị có mức năng lượng cao nhất → dễ bị kích thích, thoát ra khỏi trạng thái cân bằng và trở thành các electron tự do (dòng các electron tự do).

II. Vật dẫn kim loại

1. Khái niệm



Vật dẫn điện **Vật bán dẫn** **Vật cách điện**

- Xét electron tự do trong vật dẫn điện, đặt ở trong cường độ trường **E**

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$$

- ❖ Chân không: Vận tốc electron sẽ tăng liên tục
- ❖ Vật dẫn: Vận tốc electron tiến đến giá trị trung bình

$$\mathbf{v}_d = -\mu_e \mathbf{E} \xrightarrow{\mathbf{J}=\rho_v \mathbf{v}} \mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E}$$

μ_e [m^2/Vs]: độ cơ động của electron (luôn dương)

II. Vật dẫn kim loại

1. Khái niệm

$$\boxed{\mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E}}$$

ρ_e: mật độ điện tử tự do (luôn âm)

➢ Trong các vật dẫn kim loại, ta có quan hệ:

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}}$$

σ [S/m]: độ dẫn điện (điện dẫn suất)

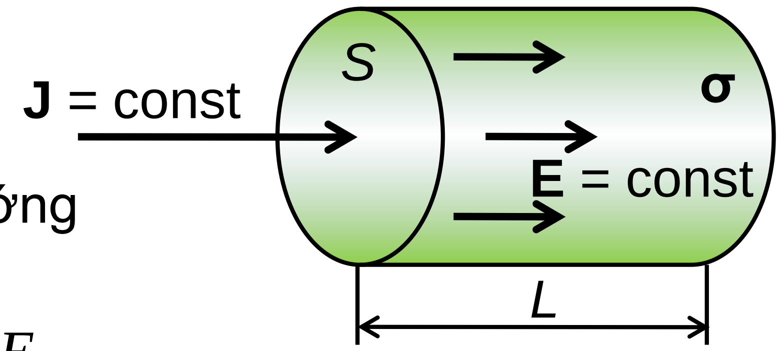
❖ Độ dẫn điện (điện trở suất) của vật dẫn thay đổi theo nhiệt độ (*VD*: Điện trở suất của đồng nhôm bạc thay đổi khoảng 0,4% khi nhiệt độ tăng 1^0K).

❖ Nhiều vật dẫn trở thành siêu dẫn (điện trở suất →0) khi nhiệt độ xấp xỉ 0^0K (*VD*: Nhôm trở siêu dẫn ở t^0 ~$1{,}14^0$K).

$$\boxed{\sigma = -\rho_e \mu_e}$$

II. Vật dẫn kim loại

1. Khái niệm



- Xét dây dẫn hình trụ, có **J** và **E** đẳng hướng

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = JS \;\; \rightarrow J = \frac{I}{S} = \sigma E$$

- Ta có: $V_{ab} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E}\cdot\int_a^b d\mathbf{L} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{L}_{ba} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{L}_{ab} \rightarrow V = EL$

- Suy ra: $\rightarrow \dfrac{I}{S} = \sigma\dfrac{V}{L} \rightarrow V = \dfrac{L}{\sigma S} I$

  với $\boxed{\mathrm{R} = \dfrac{L}{\sigma S}}$ $\;\rightarrow\; \boxed{V = RI}$ (Luật Ohm)

- Điện trở của dây dẫn có thể tính theo công thức: $R = \dfrac{V_{ab}}{I} = \dfrac{-\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}$

II. Vật dẫn kim loại

2. Tính chất vật dẫn - Điều kiện bờ

➢ Xét điều kiện tĩnh: Giả thiết tồn tại các electron bên trong một vật dẫn.

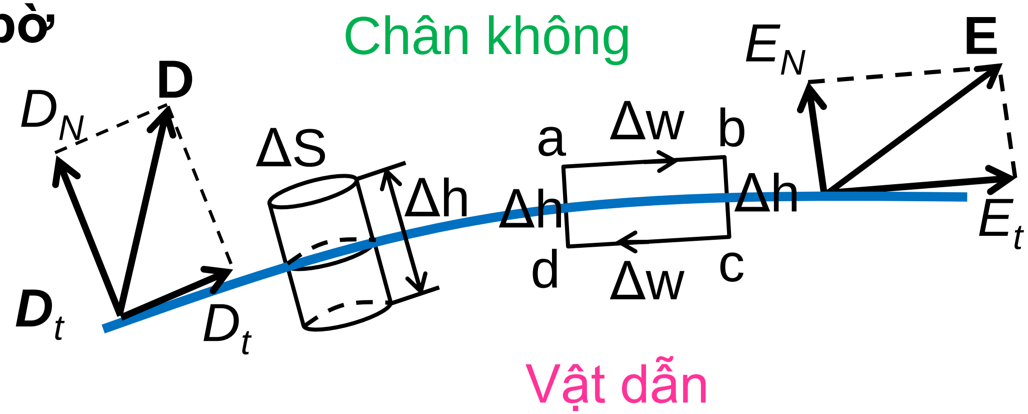
➢ Cường độ trường của các electron làm chúng chuyển động ra bề mặt của vật dẫn và có xu hướng tách rời nhau.

❖ *Mật độ điện tích tại mọi điểm bên trong vật dẫn bằng không, bề mặt vật dẫn xuất hiện một điện tích mặt.*

❖ Tại mọi điểm trong vật dẫn, dòng điện bằng không → *cường độ điện trường tại mọi điểm trong vật dẫn bằng không (theo luật Ohm)*

II. Vật dẫn kim loại

2. Tính chất vật dẫn - Điều kiện bờ



- Xét bề mặt phân cách vật dẫn và chân không.
- Vector: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_N + \mathbf{E}_t$; $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_N + \boldsymbol{D}_t$
- Ta có: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$

$$\rightarrow \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0 \quad \rightarrow E_t \Delta \text{w} - E_{N,\text{ tai b}} \frac{\Delta h}{2} + E_{N,\text{ tai a}} \frac{\Delta h}{2} = 0$$

- Trong vật dẫn: **E** = 0

$$\Delta h \rightarrow 0 \quad \rightarrow \boxed{E_t = 0 \quad D_t = 0}$$

- Áp dụng luật Gauss: $Q = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{tren}} + \int_{\text{duoi}} + \int_{\text{xung quanh}}$

$$\int_{\text{tren}} = D_N \Delta S \; ; \; \int_{\text{duoi}} = 0 \; ; \; \int_{xungquanh} = 0$$

$$\rightarrow D_N \Delta S = Q = \rho_S \Delta S$$

$$\rightarrow \boxed{D_N = \rho_S = \varepsilon_0 E_N}$$

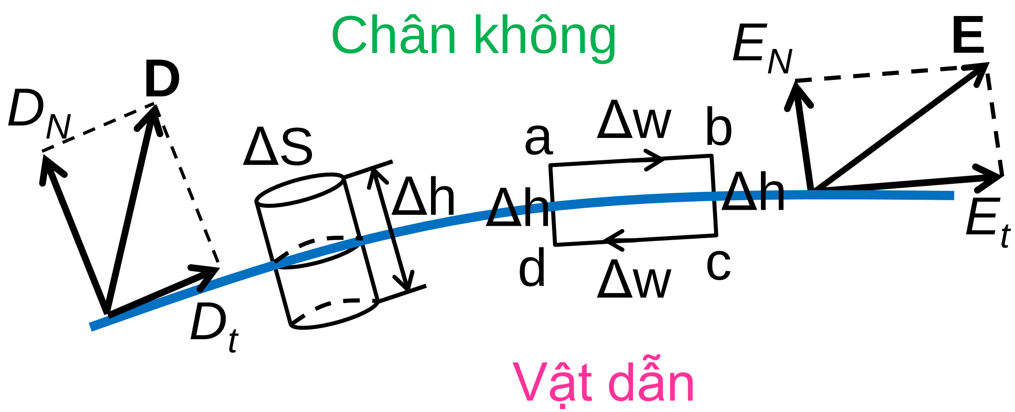
II. Vật dẫn kim loại

2. Tính chất vật dẫn - Điều kiện bờ

$$E_t = D_t = 0$$

$$D_N = \varepsilon_0 E_N = \rho_S$$

$$V_{xy} = -\int_y^x \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$



- Tính chất của vật dẫn trong điện trường tĩnh
  - Cường độ điện trường tĩnh bên trong vật dẫn bằng không.
  - Tại mọi điểm trên bề mặt của vật dẫn, vector cường độ điện trường tĩnh luôn vuông góc với bề mặt tại điểm đó.
  - Bề mặt của vật dẫn có tính đẳng thế.

II. Vật dẫn kim loại

2. Tính chất vật dẫn - Điều kiện bờ

Ví dụ: Cho trường thế V = 100($x^2 - y^2$), điểm *P*(2, -1, 3) nằm trên mặt phân cách. Tính *V*, **E**, **D**, ρ_S tại *P*. Viết phương trình của mặt dẫn.

- Điện thế tại *P:* $V_P = 100\left[2^2 - (-1)^2\right] = 300V$
- Do mặt vật dẫn đẳng thế → mọi điểm trên mặt của vật có *V*=300V → quỹ tích các điểm có điện thế *V* = 300*V* = 100($x^2 - y^2$) → $x^2 - y^2 = 3$
- Tính $\mathbf{E} = -\nabla V = -100\nabla(x^2 - y^2) = -200x\mathbf{a_x} + 200y\mathbf{a_y}$

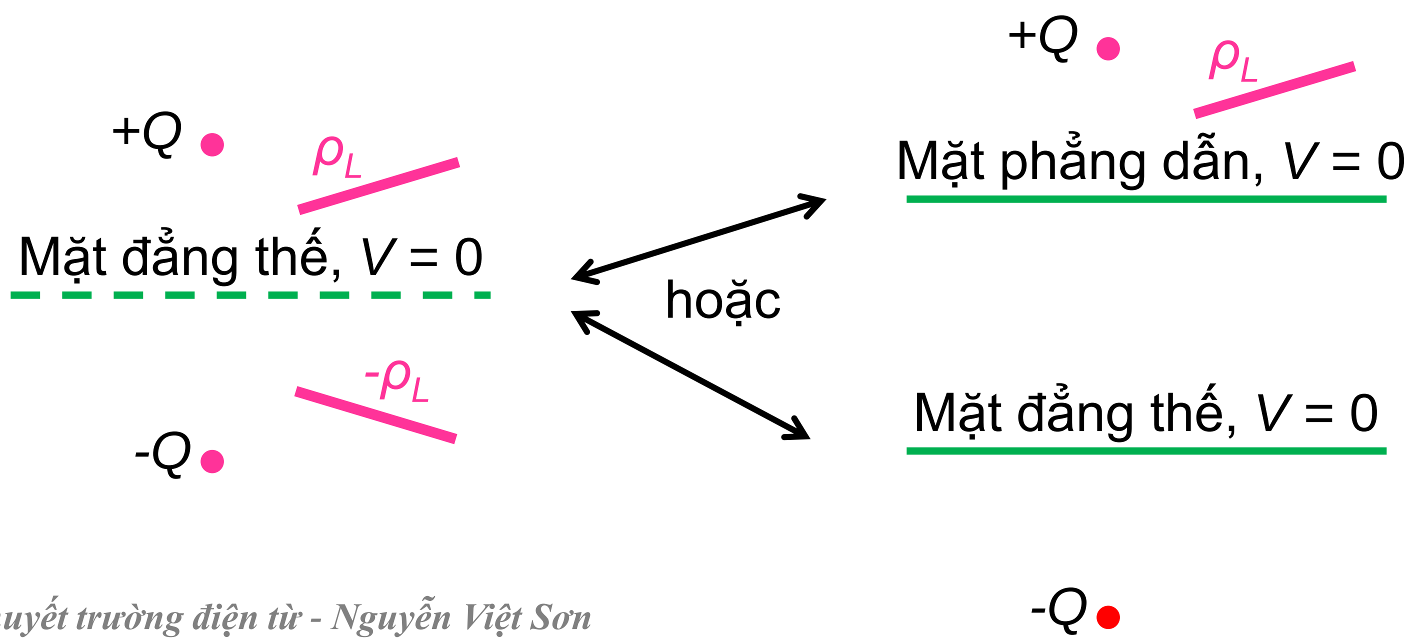
$$\rightarrow \mathbf{E}_P = -400\mathbf{a_x} - 200\mathbf{a_y}\ V/m \rightarrow \mathbf{D}_P = \varepsilon_0\mathbf{E}_P = -3,54\mathbf{a_x} - 1,771\mathbf{a_y}\ nC/m^2$$

$$\rightarrow D_{N,P} = \left|\mathbf{D}_P\right| = 3,96nC/m^2$$

$$\rightarrow \rho_{S,P} = D_{N,P} = 3,96nC/m^2$$

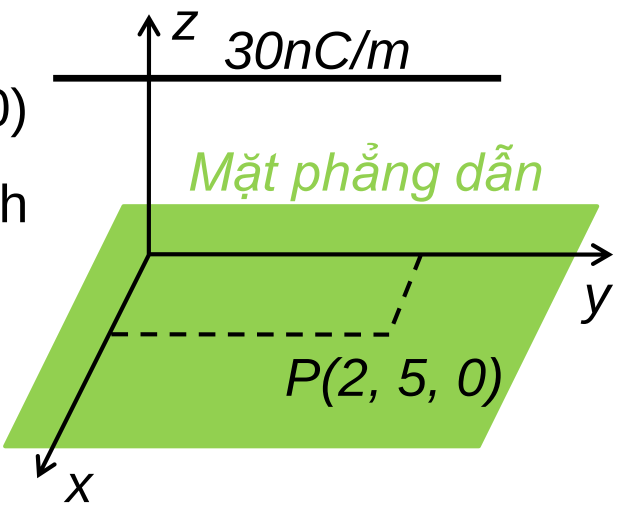
III. Phương pháp soi ảnh

- Một đặc điểm quan trọng của lưỡng cực điện là mặt phẳng nằm giữa lưỡng cực điện luôn có thế bằng không → có thể biểu diễn bằng một mặt phẳng dẫn có độ rộng vô hạn và độ dày tiến tới không.
- Có thể thay một lưỡng cực điện bằng một điện tích và một mặt phẳng dẫn mà không làm thay đổi các cường độ trường trên mặt dẫn.



III. Phương pháp soi ảnh

Ví dụ: Tính mật độ điện tích mặt ρ_S tại $P(2, 5, 0)$ trên mặt phẳng dẫn $z = 0$ nếu có một điện tích đường ρ_L = 30nC/m đặt tại $x = 0$ và $z = 3$



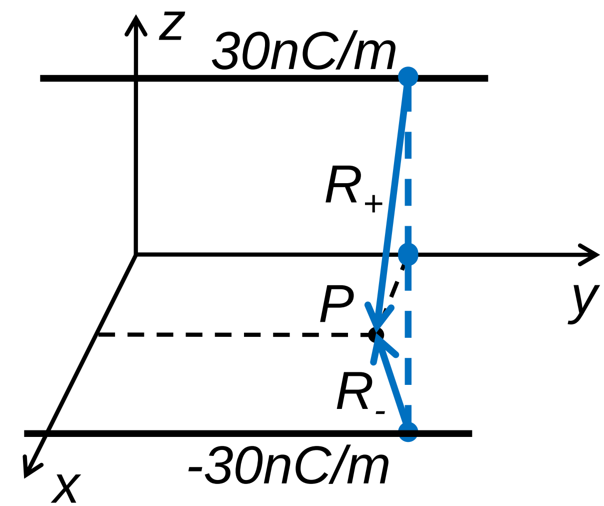
- Áp dụng phương pháp soi ảnh.

$$\mathbf{R}_+ = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z \qquad \mathbf{R}_- = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 R_+}\mathbf{a}_{R+} = \frac{30.10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{13}}\frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 R_-}\mathbf{a}_{R-} = \frac{-30.10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{13}}\frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{-180.10^{-9}\mathbf{a}_z}{2\pi\varepsilon_0(13)} = -249\mathbf{a}_z \quad V/m$$

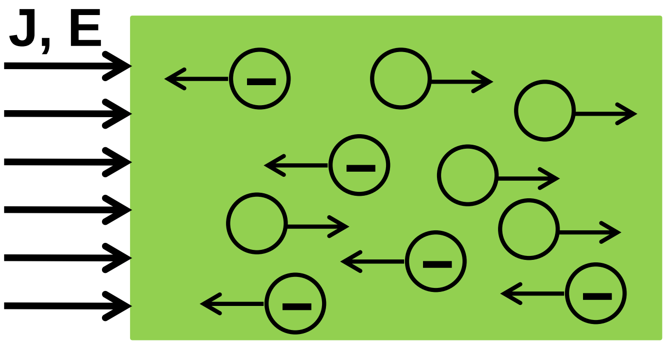


$$\rightarrow \rho_S = \varepsilon_0 E_N = -2,20nC/m^2$$

IV. Bán dẫn

➢ Trong các vật liệu bán dẫn, có 2 hạt mang điện: *Electron*, và *lỗ trống*

❖ Các electron ở vùng hóa trị nhận năng lượng kích thích → vượt qua vùng cấm để tới vùng dẫn.



❖ Trong chất bán dẫn, các khoảng trống do electron để lại (*lỗ trống*) cũng di chuyển (ngược hướng với electron).

➢ Độ dẫn điện của chất bán dẫn: $\boxed{\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h}$

➢ Độ dẫn điện chất bán dẫn tăng khi nhiệt độ tăng (ngược với kim loại)

➢ Điện dẫn chất bán dẫn tăng lên khi có lẫn tạp chất (*n-type*, *p-type*)

V. Chất điện môi

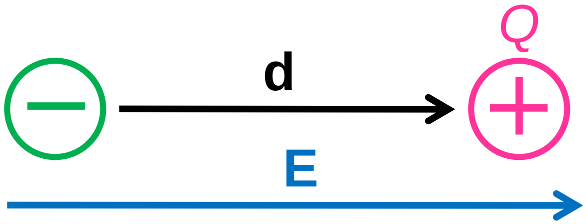
1. Khái niệm

➢ Các chất điện môi được cấu tạo bởi nhiều các phân cực điện đặt trong chân không.

- ❖ Phân cực điện không thể phân bố như quá trình dẫn đối với kim loại/bán dẫn do chúng chịu lực tương tác của nguyên tử & phân tử.
- ❖ Ở trạng thái bình thường, các phân cực điện sẽ xoay theo các hướng khác nhau.
- ❖ Khi có tác động của điện trường ngoài, các phân cực điện sẽ sắp xếp lại theo hướng của điện trường, tạo ra trường điện từ tĩnh.
- ❖ Tính chất: Các chất điện môi đều có khả năng tích lũy năng lượng điện năng.

V. Chất điện môi

1. Khái niệm



- Gọi **p** là momen lưỡng cực điện: **p** = *Q***d** [*Cm*]

- Nếu vi phân thể tích Δv có n lưỡng cực điện **p** → momen lưỡng cực điện tổng:

$$\mathbf{p}_{\text{tong}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_i$$

  - ❖ Ở trạng thái tự nhiên, $\mathbf{p}_i$ sắp xếp ngẫu nhiên → $\mathbf{p}_{\text{tổng}}$ xấp xỉ không.
  - ❖ Nếu $\mathbf{p}_i$ cùng hướng (do điện từ trường ngoài) → $\mathbf{p}_{\text{tổng}}$ khá lớn.

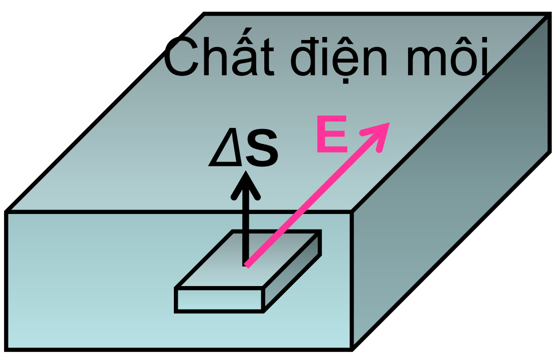
- Vector phân cực **P** cho biết số lượng momen lưỡng cực trên một đơn vị thể tích

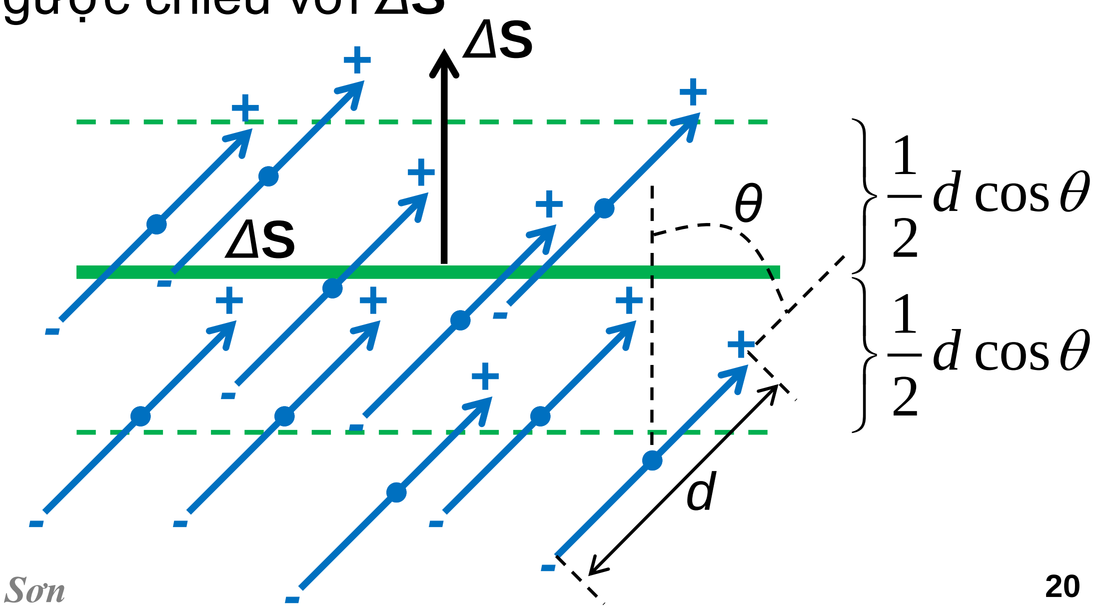
$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_i \quad [C/m^2]$$

V. Chất điện môi

1. Khái niệm

- Xét vật liệu điện môi có **P** = 0
  - Xét vi phân diện tích *Δ***S** chịu tác động của cường độ điện trường **E**
  - Dưới tác động của **E**, mỗi phân tử điện môi có: **p** = *Q***d**
  - Mỗi điện tích sẽ dịch chuyển theo hướng *Δ***S** một khoảng ½ *dcosθ*
    - Điện tích dương dịch cùng chiều với *Δ***S**
    - Điện tích âm dịch ngược chiều với *Δ***S**





V. Chất điện môi

1. Khái niệm

- Với mật độ: n phân tử / m³
  - Số phân tử dịch theo hướng **ΔS** trong một vi phân thể tích:

$$\left.\begin{aligned} \Delta Q_b = nQd\cos\theta\Delta S = nQ\mathbf{d}\cdot\Delta\mathbf{S} \\ \mathbf{p} = Q\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{P} = nQ\mathbf{d} \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta Q_b = \mathbf{P}\cdot\Delta\mathbf{S} \rightarrow Q_b = -\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}$$

  - Áp dụng luật Gauss cho một mặt kín: $Q_{\text{tong}} = \oint_S \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = Q + Q_b$

$$\rightarrow Q = Q_{\text{tong}} - Q_b = \oint_S \left(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}\right)\cdot d\mathbf{S}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}}$$

- Theo định lý Dive: $\left.\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{D}dv \\ Q = \int_V \rho_V dv \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_V}$

V. Chất điện môi

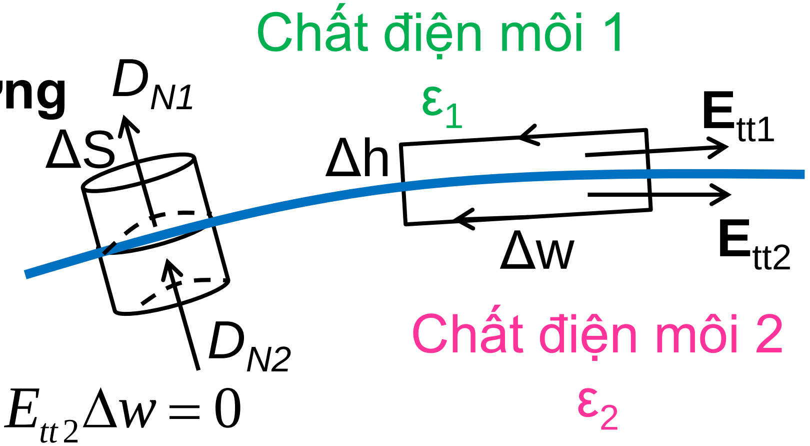
1. Khái niệm

- Trong vật liệu đẳng hướng, **E** luôn cùng chiều **P**, không phụ thuộc hướng của trường. $\boxed{\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}}$ χ_e *:* hệ số phân cực điện môi *(k_p)*
  - Ta có: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \mathbf{E}$
  - Gọi: $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ hằng số phân cực điện của vật liệu
  - Vậy: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$ với $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r}$ là hằng số điện môi của vật liệu
- Trong vật liệu dị hướng, **E** không cùng chiều **P**

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_R \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} D_x = \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \\ D_y = \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z \\ D_z = \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z \end{array}$$

V. Chất điện môi

2. Điều kiện bờ của chất điện môi lý tưởng



- Xét mặt phân cách 2 chất điện môi

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}&\to E_t\Delta w - E_N\frac{\Delta h}{2} + E_N\frac{\Delta h}{2} = 0\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta h \to 0\end{aligned}\right\} \to E_{tt1}\Delta w - E_{tt2}\Delta w = 0$$

$$\to \boxed{E_{tt1} = E_{tt2}}$$ (biến thiên liên tục)

- Mật độ dòng điện **D**: $\dfrac{D_{tt1}}{\varepsilon_1} = E_{tt1} = E_{tt2} = \dfrac{D_{tt2}}{\varepsilon_2} \to \boxed{\dfrac{D_{tt1}}{D_{tt2}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$ (biến thiên không liên tục)

- Xét $\mathbf{E_N}$: $D_{N1}\Delta S - D_{N2}\Delta S = \Delta Q = \rho_S \Delta S$

$$\to D_{N1} - D_{N2} = \rho_S \xrightarrow{\rho_S = 0} \boxed{D_{N1} = D_{N2}} \to \boxed{\frac{E_{N1}}{E_{N2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

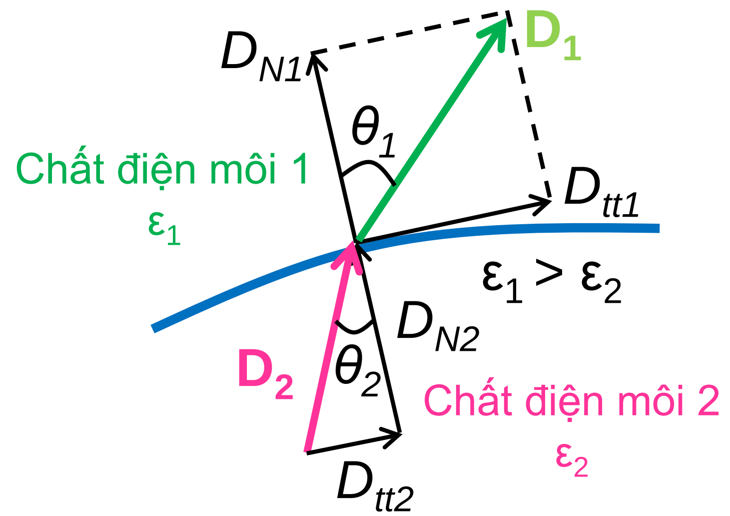
$$\varepsilon_1 E_{N1} = \varepsilon_2 E_{N2}$$

(Trên bề mặt chất điện môi không có các điện tích tự do)

V. Chất điện môi

2. Điều kiện bờ của chất điện môi lý tưởng

- Xét mặt phân cách giữa 2 chất điện môi có:
  - **D_1** lệch với phương pháp tuyến góc θ_1
  - **D_2** lệch với phương pháp tuyến góc θ_2



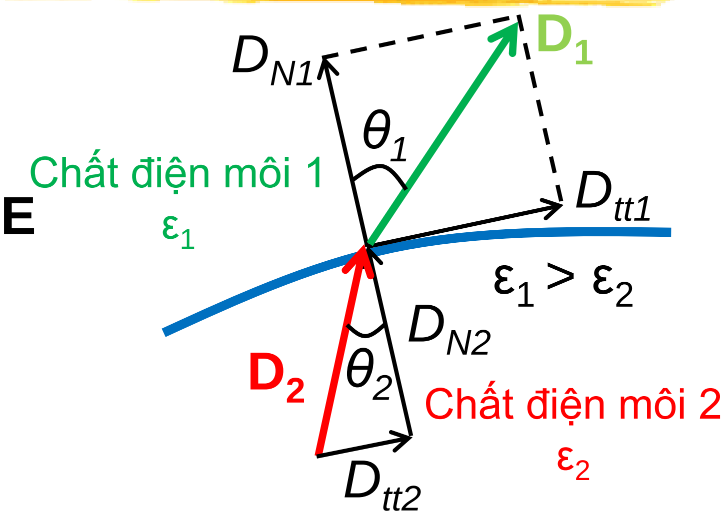
$$\left.\begin{array}{l} D_{N1} = D_{N2} \\ D_{N1} = D_1\cos\theta_1 \\ D_{N2} = D_2\cos\theta_2 \end{array}\right\} \rightarrow D_1\cos\theta_1 = D_2\cos\theta_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{D_{tt1}}{D_{tt2}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ D_{tt1} = D_1\sin\theta_1 \\ D_{tt2} = D_2\sin\theta_2 \end{array}\right\} \rightarrow \varepsilon_2 D_1\sin\theta_1 = \varepsilon_1 D_2\sin\theta_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \rightarrow \theta_2 \\ D_1 cos\theta_1 = D_2 cos\theta_2 \end{array}\right\} \rightarrow D_2$$

V. Chất điện môi

2. Điều kiện bờ của chất điện môi lý tưởng



- Trên mỗi bề mặt của mặt phân cách: **D** = ε**E**

  (**D** và **E** luôn cùng hướng)

$$D_2 = D_1\sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1}$$

$$E_2 = E_1\sqrt{\sin^2\theta_1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 \cos^2\theta_1}$$

$$\theta_2 = arctg\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2} tg\theta_1\right)$$

- **Nhận xét:**
  - Nếu biết (**E**, **D**) của một bên → tính được bên còn lại.
  - Chất điện môi có ε lớn thì **D** lớn
  - Chất điện môi có ε nhỏ thì **E** lớn

V. Chất điện môi

2. Điều kiện bờ của chất điện môi lý tưởng

Ví dụ: Xét vùng $z<0$ có chất điện môi 1: $\varepsilon_1 = 3{,}2$; $\mathbf{D_1} = -30\mathbf{a_x} + 50\mathbf{a_y} + 70\mathbf{a_z}$ nC/m^2, vùng $z>0$ có chất điện môi 2: $\varepsilon_2=2$. Tính D_{N1}, $\mathbf{D_{tt1}}$, D_{tt1}, $\mathbf{D_{N2}}$, $\mathbf{D_{tt2}}$, $\mathbf{D_2}$, θ_2

Giải:

$$\mathbf{D_{N1}} = \mathbf{D_{1z}} = 70\mathbf{a_z} \rightarrow D_{N1} = 70nC/m^2 \rightarrow D_{N1} = D_{N2} \rightarrow \mathbf{D_{N2}} = 70\mathbf{a_z} \quad nC/m^2$$

$$\mathbf{D_{tt1}} = -30\mathbf{a_x} + 50\mathbf{a_y} \quad nC/m^2 \rightarrow D_{tt1} = \sqrt{(-30)^2 + 50^2} = 58{,}31 nC/m^2$$

$$\frac{D_{tt1}}{D_{tt2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \rightarrow \mathbf{D_{tt2}} = \frac{\varepsilon_2 \mathbf{D_{tt1}}}{\varepsilon_1} = \frac{2}{3{,}2}(-30\mathbf{a_x} + 50\mathbf{a_y}) = -18{,}75\mathbf{a_x} + 31{,}25\mathbf{a_y} \quad nC/m^2$$

$$\rightarrow \mathbf{D_2} = \mathbf{D_{N2}} + \mathbf{D_{tt2}} = -18{,}75\mathbf{a_x} + 31{,}25\mathbf{a_y} + 70\mathbf{a_z} \quad nC/m^2$$

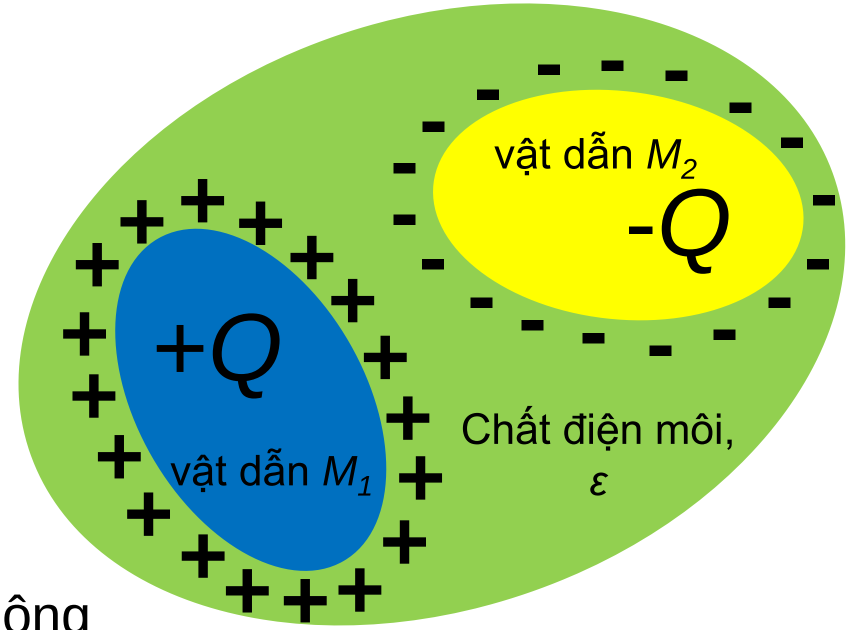
$$\theta_1 = arctg\frac{D_{tt1}}{D_{1z}} = arctg\frac{58{,}3}{70} = 39{,}8^0 \rightarrow \theta_2 = arctg\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} tg\theta_1\right) = 27{,}5^0$$

VI. Điện dung

1. Khái niệm

- Xét 2 vật dẫn đặt trong điện môi:
  - Vật dẫn M_1: $+Q$
  - Vật dẫn M_2: $-Q$

$$\sum Q = -Q + Q = 0$$



- Nhận xét:
  - Bề mặt vật dẫn đóng vai trò như điện tích mặt, và mặt đẳng thế.
  - Vector cường độ điện trường vuông góc với bề mặt vật dẫn tại điểm xét.
  - M_1 tích điện dương → cường độ trường hướng từ M_1 sang M_2, và điện thế của mặt M_1 dương hơn so với điện thế của mặt M_2
- **Định nghĩa:** *Điện dung C giữa hệ hai vật dẫn có giá trị bằng tỉ số điện tích của vật dẫn với hiệu điện thế giữa hai vật dẫn đó.*

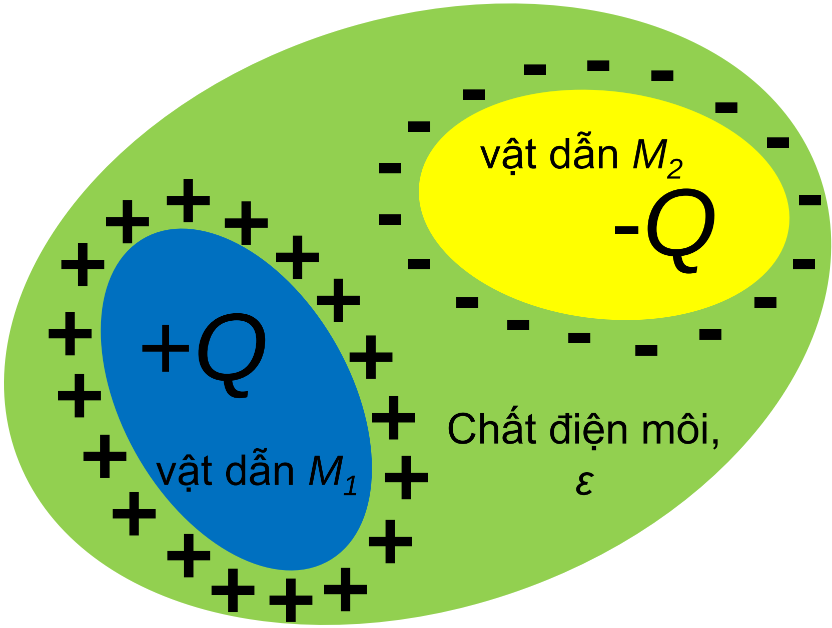
$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0}}$$

V_0: hiệu điện thế giữa 2 vật dẫn M_1 và M_2

VI. Điện dung

1. Khái niệm

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0}} \quad [\frac{C}{V} = F]$$



- Tổng quát:
  - Điện tích Q được tích cho toàn bộ mặt kín của vật mang điện M_1:

$$Q = \oint_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

  - Hiệu điện thế V_0 là công sinh ra để di chuyển điện tích thử từ M_2 sang M_1

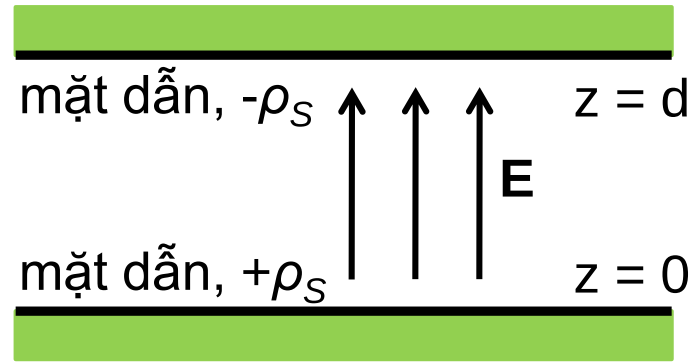
$$V_0 = -\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

- Vậy: $C = \dfrac{\oint_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}$

Giá trị điện dung phụ thuộc vào kích thước vật lý của hệ vật dẫn và phụ thuộc vào hằng số điện môi của chất điện môi.

VI. Điện dung

1. Khái niệm



- Xét 2 mặt dẫn phẳng, rộng vô hạn, đặt song song, cách nhau 1 khoảng *d*
  - Mặt trên có mật độ điện tích mặt $+\rho_S$
  - Mặt dưới có mật độ điện tích mặt $-\rho_S$
- Cường độ trường giữa 2 mặt dẫn:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\varepsilon}\mathbf{a}_z \rightarrow \mathbf{D} = \rho_S \mathbf{a}_z$$

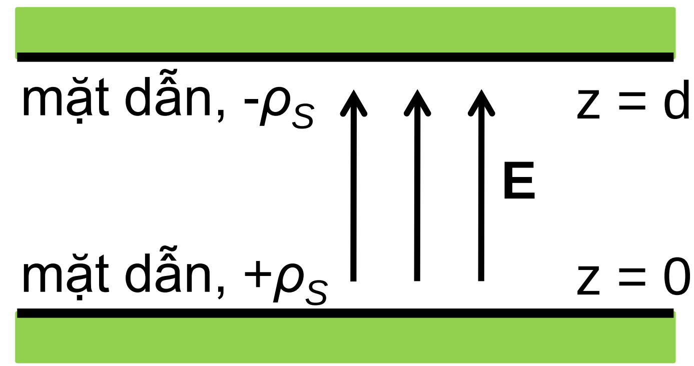
ε: hằng số điện môi của chất điện môi giữa 2 mặt phẳng dẫn điện

- Hiệu điện thế giữa 2 mặt dẫn điện:

$$V_0 = -\int_{\text{trªn}}^{\text{d-íi}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_d^0 \frac{\rho_S}{\varepsilon}dz = \frac{\rho_S}{\varepsilon}d$$

VI. Điện dung

1. Khái niệm



- Thực tế: Xét 2 mặt phẳng dẫn điện có độ rộng hữu hạn, có diện tích *S* lớn hơn nhiều khoảng cách *d* giữa chúng.

$$\rightarrow Q = \rho_S S$$

- Vậy điện dung giữa 2 mặt phẳng dẫn điện là:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\varepsilon S}{d}}$$

- Năng lượng:

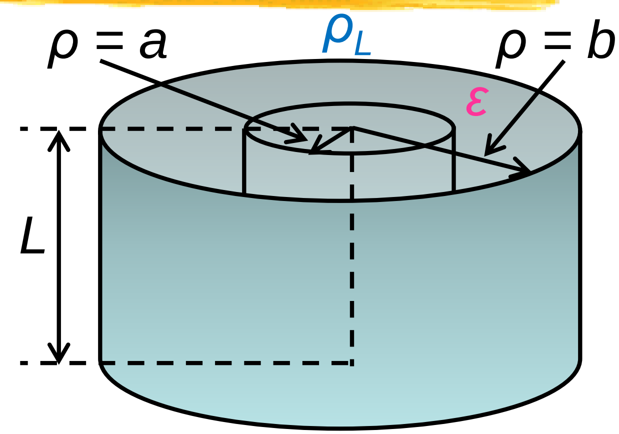
$$W_E = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^S\int_0^d \frac{\varepsilon\rho_S^2}{\varepsilon^2} dzdS = \frac{1}{2}\frac{\rho_S^2}{\varepsilon} Sd = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}\frac{\rho_S^2 d^2}{\varepsilon^2}$$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}QV_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

VI. Điện dung

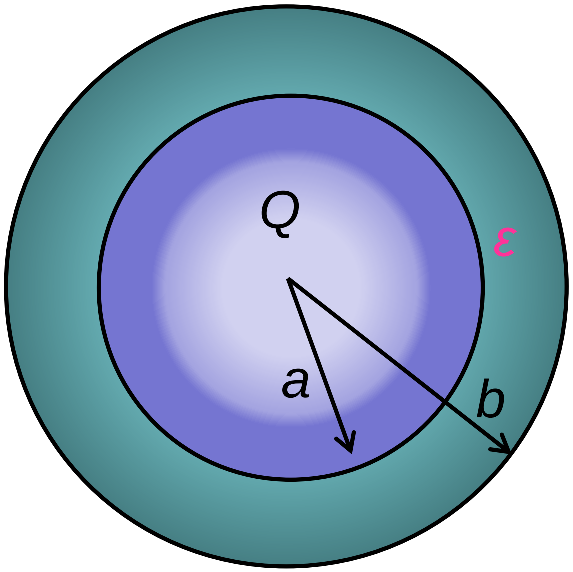
2. Một số bài toán tính điện dung

- Cáp đồng trục, dài *L*:
  - Lõi bán kính *a*
  - Vỏ bán kính *b*



$$\left.\begin{array}{l} V_{ab} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{b}{a} \\ Q = \rho_L L \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{C = \dfrac{Q}{V_{ab}} = \dfrac{2\pi\varepsilon L}{\ln\dfrac{b}{a}}}$$

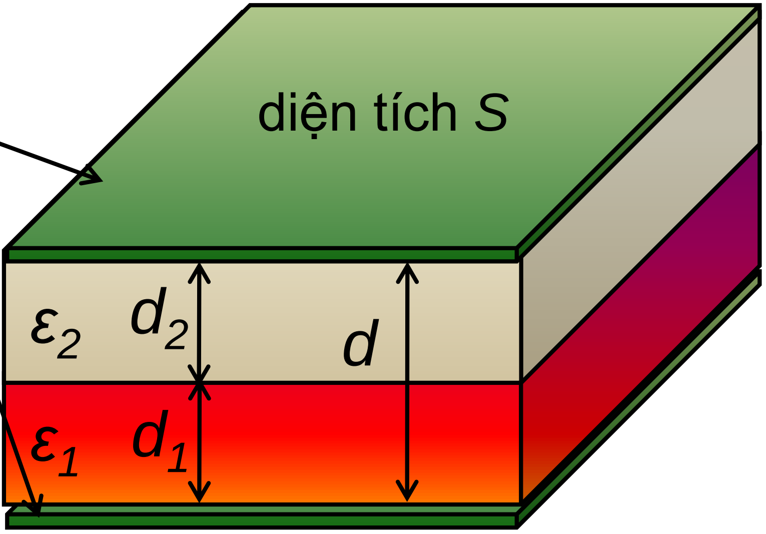
- Tụ cầu đồng tâm:
  - Mặt cầu trong, bán kính *a*
  - Mặt cầu ngoài, bán kính *b*



$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}}$$

VI. Điện dung

2. Một số bài toán tính điện dung



- Xét 2 mặt dẫn song song, diện tích *S*, cách nhau *d (d << S)*, tích điện *Q*
  - Hiệu điện thế giữa 2 mặt dẫn:

$$V_0 = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

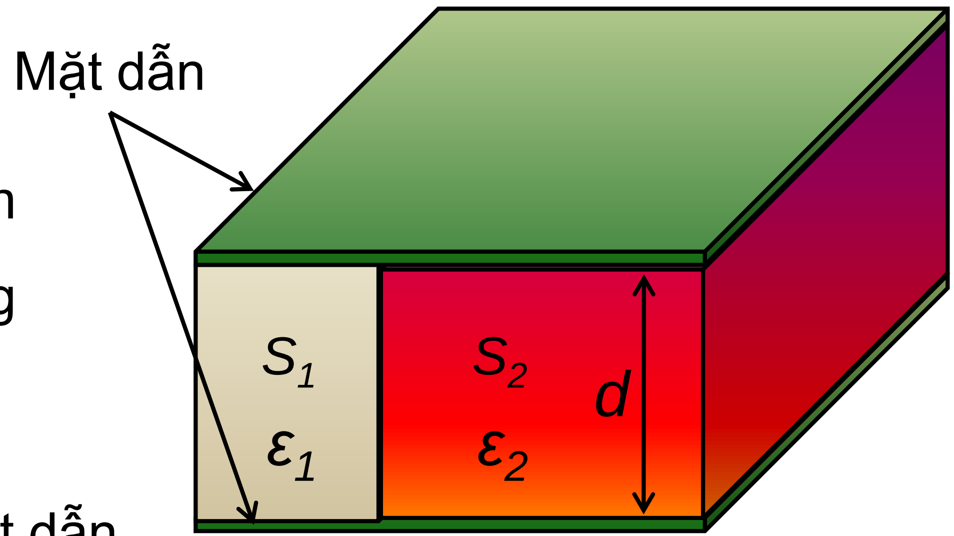
  - Tại mặt phân cách giữa 2 điện môi, vector dịch chuyển điện **D** theo phương pháp tuyến: $D_{N1} = D_{N2} = D$
  - Ta có:

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_1 S} \rightarrow V_1 = E_1 d_1 = \frac{Q d_1}{\varepsilon_1 S} \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_2 S} \rightarrow V_2 = \frac{Q d_2}{\varepsilon_2 S}$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2 S}} = \boxed{\frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}}$$

VI. Điện dung

2. Một số bài toán tính điện dung



- Xét trường hợp, mặt phân cách của 2 chất điện môi theo phương pháp tuyến với mặt dẫn
- Giả thiết V_0 là điện thế giữa 2 mặt dẫn

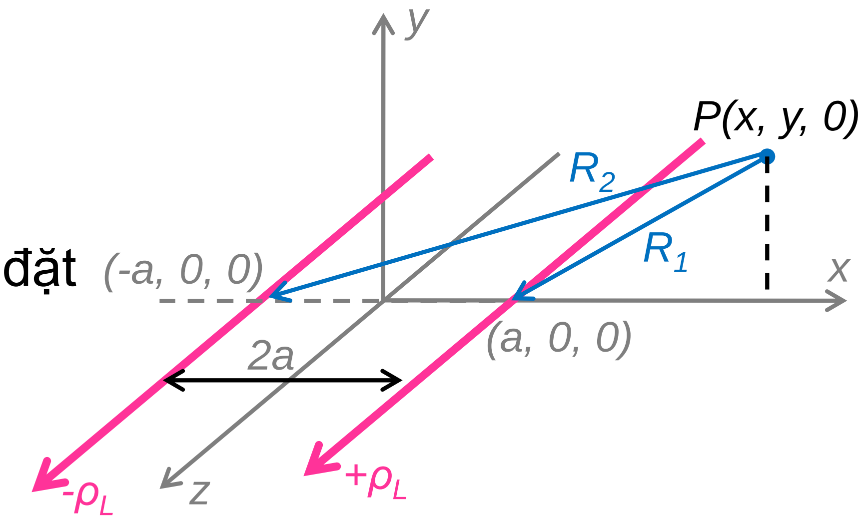
$$\rightarrow E_1 = E_2 = \frac{V_0}{d}$$

- Điện dung C được tính theo công thức:

$$\rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2}$$

VI. Điện dung

2. Một số bài toán tính điện dung



- Xét 2 dẫn dẫn thẳng dài vô hạn, đặt song song với nhau trong không gian
- Điện thế điểm $P(x, y, 0)$

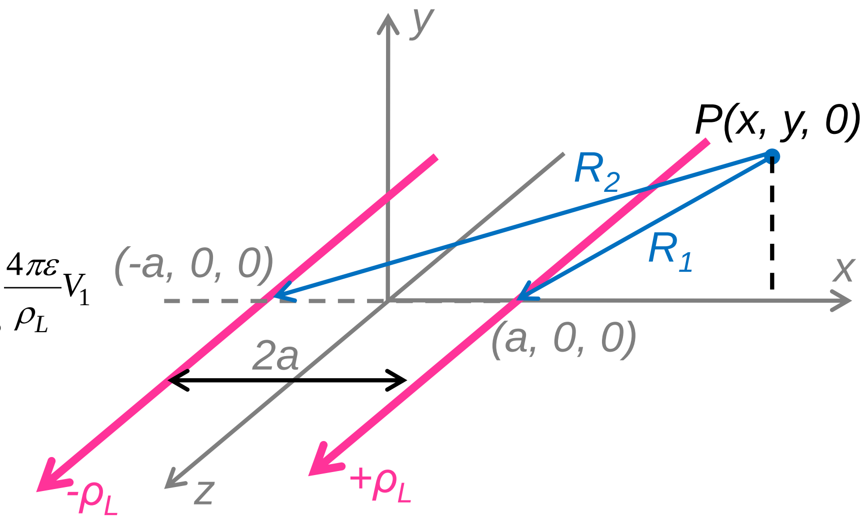
$$V = V_1 + V_2 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_{01}}{R_1} - \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_{02}}{R_2} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_{01}R_2}{R_{02}R_1}$$

- Chọn $R_{01} = R_{02}$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\ R_2 &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

VI. Điện dung

2. Một số bài toán tính điện dung



$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

- Giả sử V_1 là mặt đẳng thế, đặt: $K_1 = e^{\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_L} V_1}$

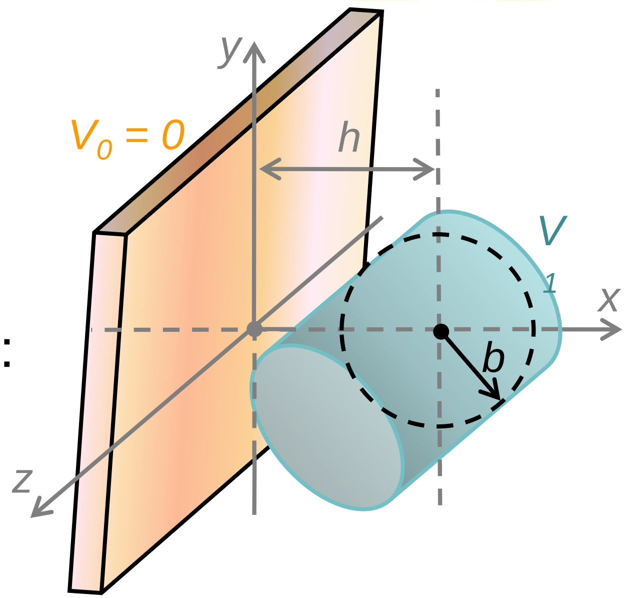
$$K_1 = e^{\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_L} \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\to x^2 - 2ax\frac{K_1+1}{K_1-1} + y^2 + a^2 = 0 \quad \to \left(x - a\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2$$

- Nhận xét:
  - Mặt đẳng thế $V = V_1$ không phụ thuộc z → V_1 có dạng một mặt trụ
  - Giao giữa mặt V_1 với mặt $x0y$ là đường tròn:
    - Bán kính: $b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$
    - Tọa độ tâm: $y = 0 \;;\; h = a\frac{K_1+1}{K_1-1}$

VI. Điện dung

2. Một số bài toán tính điện dung



- Nhận xét:
  - Mặt đẳng thế $V = V_1$ có dạng một mặt trụ
  - Giao giữa mặt V_1 với mặt $x0y$ là đường tròn:
    - Bán kính: $b = \dfrac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$
    - Tọa độ tâm: $y = 0 \;\; ; \;\; h = a\dfrac{K_1 + 1}{K_1 - 1}$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{h^2 - b^2} \\ \sqrt{K_1} = \dfrac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \end{cases} \xrightarrow{K_1 = e^{\frac{4\pi\varepsilon V_1}{\rho_L}}} \boxed{\rho_L = \dfrac{4\pi\varepsilon V_1}{\ln K_1}}$$

Biết h, b, V_1 xác định được a, ρ_L

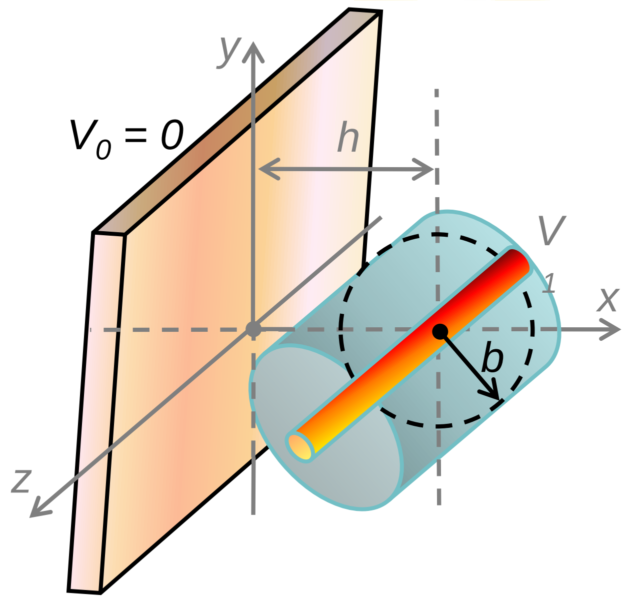
$$C_{matphang,tru} = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{4\pi\varepsilon L}{\ln K_1} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln \dfrac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}} = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon L}{\cosh^{-1}\dfrac{h}{b}}}$$

L chiều dài của trụ tròn theo phương z

VI. Điện dung

2. Một số bài toán tính điện dung

$$C_{matphang,tru} = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{4\pi\varepsilon L}{\ln K_1} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln \dfrac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\cosh^{-1}\dfrac{h}{b}}$$

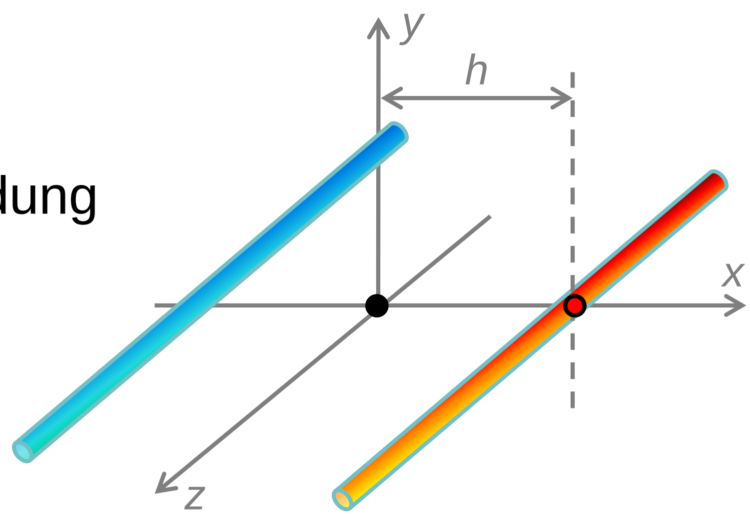


- Nếu $b << h$: $\rightarrow \ln\dfrac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b} \simeq \ln\left(\dfrac{h+h}{b}\right) = \ln\dfrac{2h}{b}$

$$\rightarrow C_{\text{matphang.tru}} = C_{\text{matphang, day}} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\dfrac{2h}{b}}$$

- Tổng quát, ta có công thức tính điện dung giữa 2 dây dẫn thẳng đặt song song:

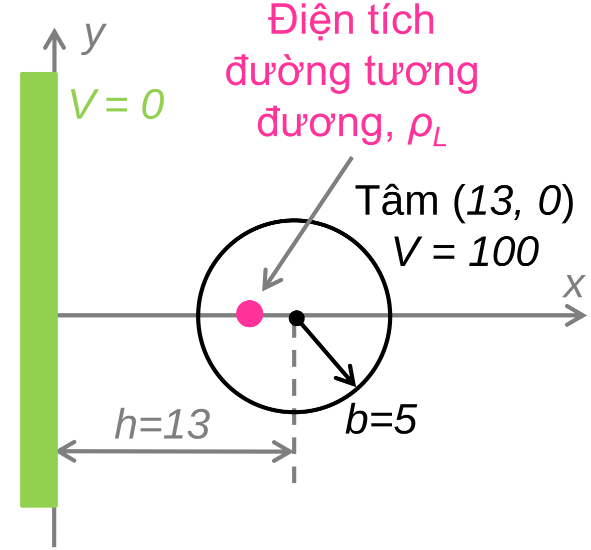
$$\rightarrow \boxed{C_{\text{day, day}} = \frac{\pi\varepsilon L}{\ln\dfrac{2h}{b}}}$$



VI. Điện dung

2. Một số bài toán tính điện dung

Ví dụ 1: Cho đường tròn có tâm x = 13, y = 0, bán kính b = 5 là giao của mặt x0y với mặt trụ đẳng thế V = 100V.



a. Tìm vị trí, độ lớn điện tích đường tương đương

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12m$$

$$\sqrt{K_1} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \frac{13+12}{5} = 5 \to K_1 = 25$$

$$\to \rho_L = \frac{4\pi\varepsilon V_1}{\ln K_1} = \frac{4\pi.8,854.10^{-12}.100}{\ln 25} = 3,46nC/m$$

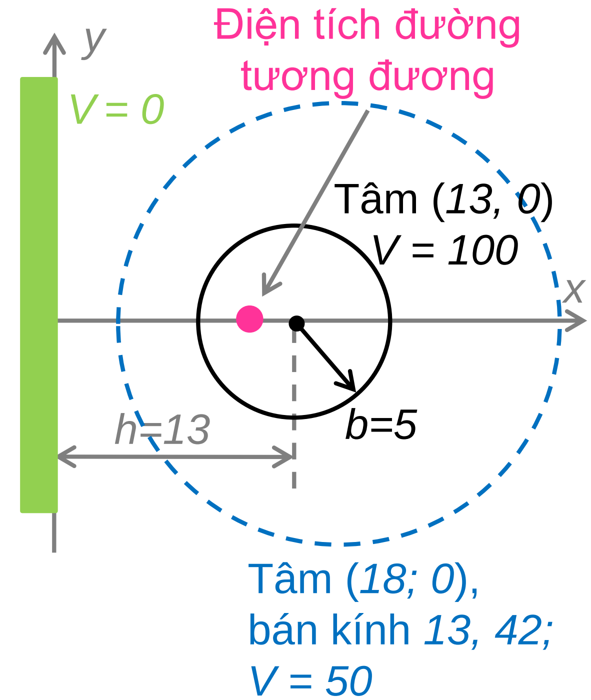
b. Tính điện dung giữa mặt đẳng thế V = 0 & điện tích đường tương đương.

$$C_{\text{matphang,tru}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}\dfrac{h}{b}} = \frac{2\pi.8,854.10^{-12}}{\cos h^{-1}\dfrac{13}{5}} = 34,6\,pF/m$$

VI. Điện dung

2. Một số bài toán tính điện dung

c. Biết mặt đẳng thế V_1= 50V của điện tích đường. Tìm tọa độ tâm của đường tròn giao giữa mặt trụ đẳng thế với mặt phẳng x0y

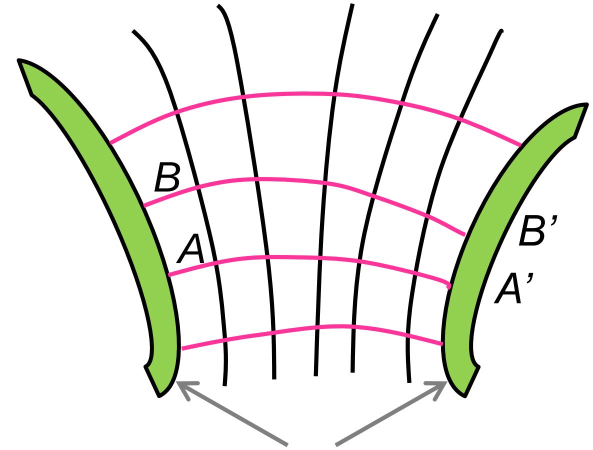


$$K_1 = e^{\frac{4\pi\varepsilon V_1}{\rho_L}} = e^{\frac{4\pi.8,854.10^{-12}.50}{3,46.10^{-9}}} = 5$$

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} = \frac{2.12\sqrt{5}}{5-1} = 13,42m$$

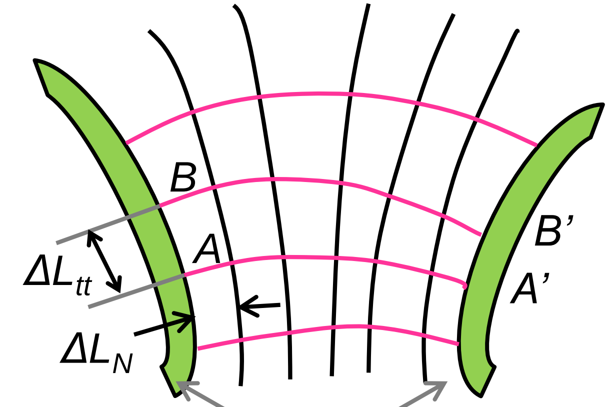
$$h = a\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = 12\frac{5+1}{5-1} = 18m$$

VII. Phương pháp đường sức – đẳng thế



- Các kết quả đã chứng minh:
  - Mặt dẫn là một mặt đẳng thế
  - Vector cường độ điện trường **E** và vector mật độ dịch chuyển điện **D** luôn vuông góc với mặt đẳng thế.
  - Cường độ điện trường **E** và mật độ dịch chuyển điện **D** vuông mặt dẫn phân cách và có thành phần tiếp tuyến bằng không.
  - Các đường sức (*biểu diễn dòng điện dịch*) luôn bắt đầu và kết thúc trên 1 điện tích, do đó đối với các chất điện môi đồng chất (không có các điện tích tự do), các đường sức sẽ bắt đầu và kết thúc trên các mặt dẫn phân cách.

VII. Phương pháp đường sức – đẳng thế



- Giả thiết, tổng đường sức trong ống *AB* là: *ΔΨ*
  - Coi ΔL_{tt} là chiều ngang của ống *AB*
  - Độ sâu của ống AB là 1m
  - Cường độ điện trường *E* tại điểm giữa của ống *AB* được tính theo công thức

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta\psi}{\Delta L_{tt}}$$

  - Mặt khác: $E = \dfrac{\Delta V}{\Delta L_N}$

    ΔV: hiệu điện thế giữa 2 mặt đẳng thế kề nhau

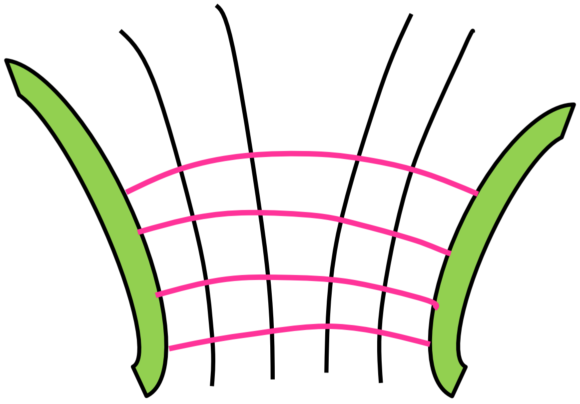
    ΔL_N : khoảng cách 2 mặt đẳng thế kề nhau

  - Do các mặt đẳng thế rất gần nhau (*ΔV* nhỏ) và khoảng cách giữa 2 đường sức nhỏ (*ΔΨ* nhỏ)

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta\psi}{\Delta L_{tt}} = \frac{\Delta V}{\Delta L_N} \xrightarrow[\Delta\psi = const]{\varepsilon = const,\, \Delta V = const} \boxed{\frac{\Delta L_{tt}}{\Delta L_N} = const = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta\psi}{\Delta V}}$$

VII. Phương pháp đường sức – đẳng thế

$$\frac{\Delta L_{tt}}{\Delta L_N} = const = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta \psi}{\Delta V} = 1$$



- Tỷ số trên sẽ luôn không đổi:
  - Trong khoảng cách giữa 2 đường sức dọc theo một mặt đẳng thế
  - Trong khoảng giữa các mặt đẳng thế dọc theo một đường sức.
  - Đơn giản, chọn: $\Delta L_{tt} = \Delta L_N$
- Điện dung C giữa 2 mặt dẫn:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{N_Q \Delta Q}{N_V \Delta V} = \frac{N_Q \Delta \psi}{N_V \Delta V}$$

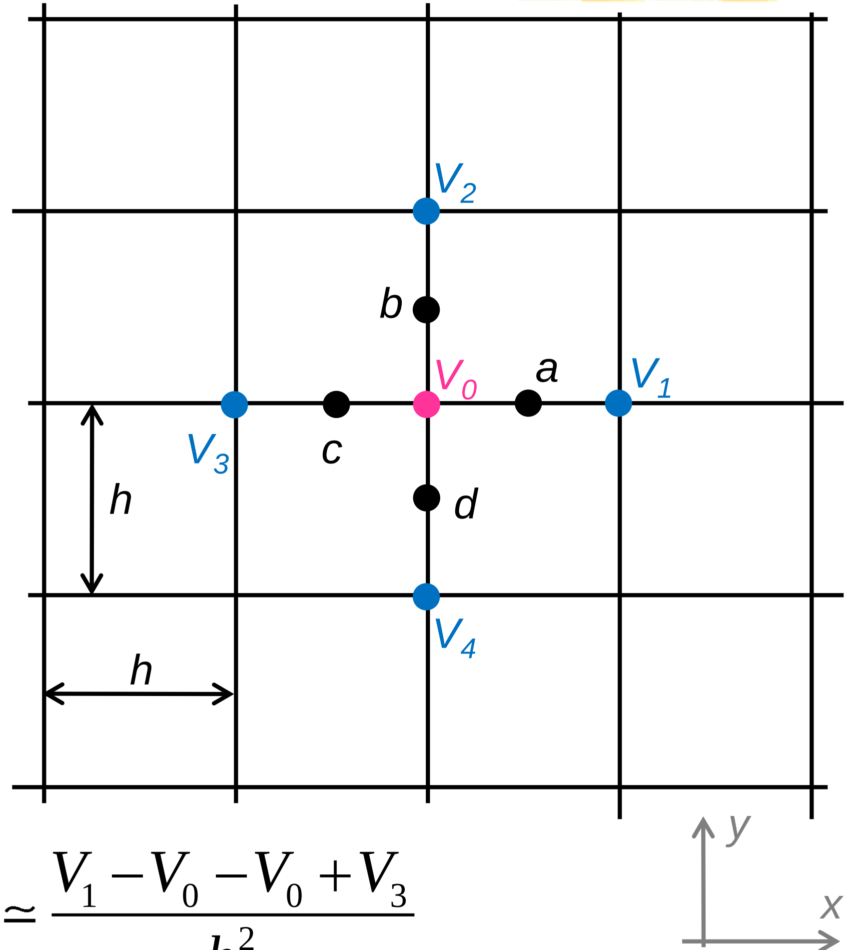
$$\rightarrow C = \frac{N_Q}{N_V}\varepsilon\frac{\Delta L_{tt}}{\Delta L_N} = \varepsilon\frac{N_Q}{N_V}$$

N_Q: Số các ống sức nối 2 mặt dẫn

N_V: số các bước điện thế giữa 2 mặt dẫn

VIII. Phương pháp lưới

- Xét trường thế: $V = V(x, y)$
  - Trường thế phân bố đều trên mặt lưới kích thước h
  - Không gian chứa chất điện môi đồng chất.



- Ta có: $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \xrightarrow[E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}]{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a &\simeq \frac{V_1 - V_0}{h} \\ \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c &\simeq \frac{V_0 - V_3}{h} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \simeq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \simeq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

Tương tự: $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_0 \simeq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2} \rightarrow \boxed{V_0 \simeq \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)}$

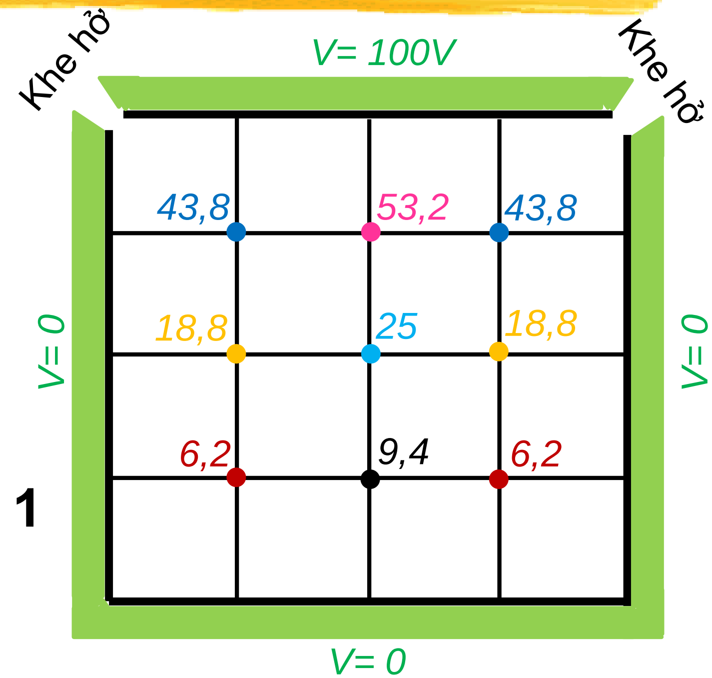
VIII. Phương pháp lưới

➢ Xét miền giới hạn bởi các mặt dẫn đẳng thế:

❖ Chia thành 16 ô vuông bằng nhau.

$$V_0 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$

Bước 1



$$\frac{1}{4}(100+0+0+0)=25$$

$$\frac{1}{4}(100+50+0+25)=43,8$$

$$\frac{1}{4}(0+0+0+25)=6,2$$

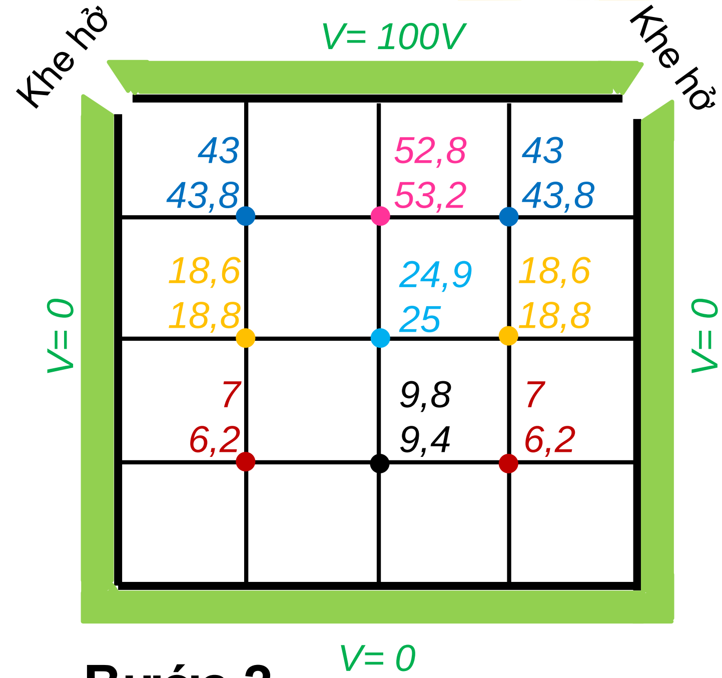
$$\frac{1}{4}(43,8+43,8+25+100)=53,2$$

$$\frac{1}{4}(43,8+25+6,2+0)=18,8$$

$$\frac{1}{4}(6,2+25+6,2+0)=9,4$$

VIII. Phương pháp lưới

$$V_0 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$



$$\frac{1}{4}(100 + 53,2 + 18,8 + 0) = 43$$

$$\frac{1}{4}(43 + 43 + 25 + 100) = 52,8$$

$$\frac{1}{4}(43 + 25 + 0 + 6,2) = 18,6$$

$$\frac{1}{4}(18,6 + 52,8 + 18,6 + 9,4) = 24,9$$

Bước 2

$$\frac{1}{4}(18,6 + 9,4 + 0 + 0) = 7$$

$$\frac{1}{4}(7 + 24,9 + 7 + 0) = 9,8$$

VIII. Phương pháp lưới

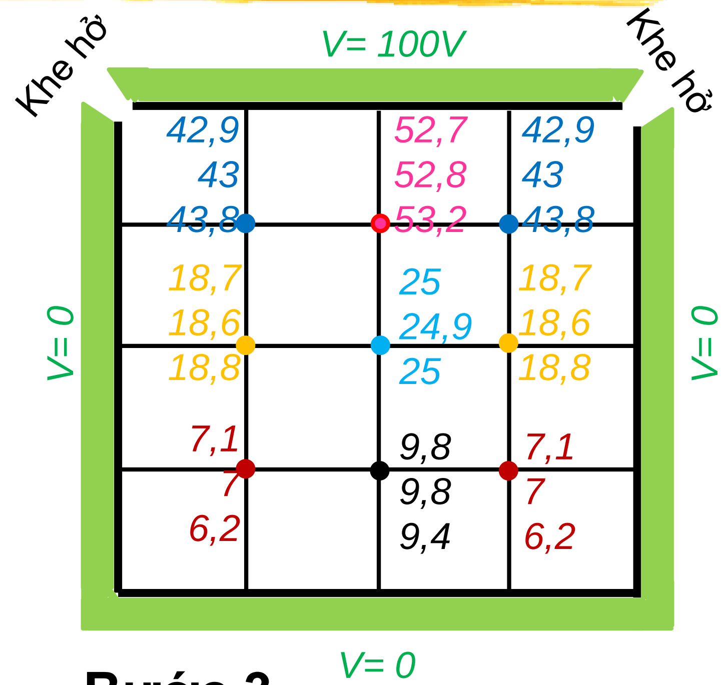
$$V_0 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$

$$\frac{1}{4}(100 + 52,8 + 18,6 + 0) = 42,9$$

$$\frac{1}{4}(42,9 + 42,9 + 24,9 + 100) = 52,7$$

$$\frac{1}{4}(42,9 + 24,9 + 7 + 0) = 18,7$$

$$\frac{1}{4}(18,7 + 52,7 + 18,7 + 9,8) = 25$$



Bước 3

$$\frac{1}{4}(18,7 + 9,8 + 0 + 0) = 7,1$$

$$\frac{1}{4}(7,1 + 25 + 7,1 + 0) = 9,8$$

IX. Sự tương đồng giữa chất điện môi và vật dẫn

Vật dẫn	Chất điện môi
$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_\sigma$	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}_\varepsilon$
$\mathbf{E}_\sigma = -\nabla V_\sigma$	$\mathbf{E}_\varepsilon = -\nabla V_\varepsilon$

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}$$

$$V_{\sigma 0} = -\int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}$$

$$\rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{V_{\sigma 0}}{I} = \dfrac{-\int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}}{\sigma \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}} \\ C = \dfrac{Q}{V_{\varepsilon 0}} = \dfrac{\varepsilon \oint_S \mathbf{E}_\varepsilon \cdot d\mathbf{S}}{-\int \mathbf{E}_\varepsilon \cdot d\mathbf{L}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{E}_\varepsilon = \mathbf{E}_\sigma]{V_{\varepsilon 0} = V_{\sigma 0}} \boxed{RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}}$$